详细解答

STEP II 2001，第 4 题

纯数学 · 倍角方程

> **STEP II 2001，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q4

关键思路

f 的每一项都含有因子 $\sin x$：$\sin 2x = 2\sin x\cos x$，而题目的提示对 $\sin 3x$ 也有同样的作用。抽出 $\sin x$ 之后，剩下的是一个关于 $\cos x$ 的二次式（quadratic），而 P、Q、R 所满足的条件，正好就是“这个二次式的判别式（discriminant）为负”。第二部分是同一个函数，只是取 $P = 1$、$Q = 1$、$R = -1$，并把 x 换成 $2nx$。这时二次式确实有根，功夫就在于找出哪一个根最接近容许范围的上端。

解答

第一个结果

设 $c = \cos x$。利用 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 及题目给出的 $\sin 3x$ 恒等式（identity），

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= P\sin x + 2Q\sin x\cos x + R\sin x\,(4\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\,(4Rc^2 + 2Qc + (P - R)). \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{f}(x) = 0$ 当且仅当 $\sin x = 0$ 或 $4Rc^2 + 2Qc + (P - R) = 0$。

首先，$R \neq 0$：若 $R = 0$，条件便会变成 $Q^2 < 0$，这是不可能的。因此括号内确实是一个关于 c 的二次式，其判别式为

$$(2Q)^2 - 4\cdot 4R\,(P - R) = 4(Q^2 - 4R(P - R)) < 0$$

这由假设可得。判别式为负的实系数二次式没有实根，所以对任何实数 c，括号内的式子都不会等于零，当 $c = \cos x$ 时自然也不例外。故此 $\mathrm{f}(x) = 0$ 必然导致 $\sin x = 0$，即 $x = m\pi$，其中 m 为整数。反过来，每一个 $x = m\pi$ 都是 f 的零点（zero），所以这些正好就是全部零点，结果得证。

g 的最大根

设 $y = 2nx$。那么 $g(x) = \sin y + \sin 2y - \sin 3y$，即是取 $P = 1$、$Q = 1$、$R = -1$ 时的 $f(y)$。这里 $Q^2 = 1$ 并不小于 $4R(P - R) = -8$，所以第一个结果并不适用，而二次式有实根。设 $c = \cos y$，由上面的因式分解（factorisation）可得

$$g(x) = \sin y\,(-4c^2 + 2c + 2) = -2\sin y\,(2c + 1)(c - 1).$$

所以 $g(x) = 0$ 当且仅当

$$\sin y = 0, \qquad \cos y = 1, \qquad \text{或} \qquad \cos y = -\tfrac{1}{2}.$$

$\cos y = 1$ 的情况已经包含在 $\sin y = 0$ 之内。因此以 y 表示的根为

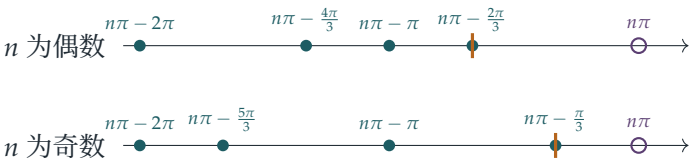
$$y = k\pi \quad \text{或} \quad y = 2k\pi \pm \tfrac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

在每一个周期（period）$[2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ 之内，根位于 $2k\pi$ 加上 0、$\frac{2\pi}{3}$、π、$\frac{4\pi}{3}$ 之处。

范围 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 变成 $0 < y < n\pi$，而右端点 $y = n\pi$ 本身是一个根，却被排除在外。所以我们要找的是严格小于 $n\pi$ 的最大根，而关键只在于 $n\pi$ 在其所属周期内的位置。

> **想一想** 为甚么 n 的奇偶性（parity）有影响?

根的分布规律每隔 2π 重复一次，而不是每隔 π。若 n 为偶数，$n\pi$ 是 2π 的倍数；若 n 为奇数，$n\pi$ 是 π 的奇数倍。在这两种情况下，紧接在 $n\pi$ 之下的根，其间距并不相同。



（g 以 y 表示的根，范围为 $n\pi$ 之下的最后一段 2π，按比例绘画。空心圆圈标示被排除的端点，琥珀色的短线标示最大根。）

n 为偶数。这时 $n\pi = 2k\pi$，其中 $k = \frac{n}{2} \geq 1$，而在它之下的最后一个周期内，以 $n\pi$ 为基准量度，根为

$$n\pi - 2\pi, \quad n\pi - \tfrac{4\pi}{3}, \quad n\pi - \pi, \quad n\pi - \tfrac{2\pi}{3}.$$

其中最后一个是 $2(k-1)\pi + \frac{4\pi}{3}$，它是根，因为其余弦值为 $-\frac{1}{2}$。在 $(n\pi - \frac{2\pi}{3}, n\pi)$ 内没有根：这个区间内没有 π 的倍数，而 $\cos y = -\frac{1}{2}$ 则需要 $y \equiv \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$，但这里 y 在模 2π 之下严格介乎 $\frac{4\pi}{3}$ 与 2π 之间。此外，由于 $n \geq 2$，有 $n\pi - \frac{2\pi}{3} > 0$。所以最大根对应 $y = n\pi - \frac{2\pi}{3}$，而

$$x = \frac{y}{2n} = \frac{(3n-2)\pi}{6n} \qquad (n \text{ 为偶数}).$$

n **为奇数**。这时 $n\pi = 2k\pi + \pi$，其中 $k = \frac{n-1}{2} \geq 0$。在由 $2k\pi = n\pi - \pi$ 开始的周期内量度，$n\pi$ 之下的根位于偏移量 0 和 $\frac{2\pi}{3}$ 之处，所以候选的根是 $n\pi - \pi$ 和 $n\pi - \frac{\pi}{3}$。区间 $\left(n\pi - \frac{\pi}{3}, n\pi\right)$ 对应于 y 在模 2π 之下严格介乎 $\frac{2\pi}{3}$ 与 π 之间，当中没有根。而且 $n\pi - \frac{\pi}{3} \geq \frac{2\pi}{3} > 0$。所以最大根对应 $y = n\pi - \frac{\pi}{3}$，而

$$x = \frac{(3n-1)\pi}{6n} \qquad (n \text{ 为奇数}).$$

验算

当 $n = 1$ 时，在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上 $\mathrm{g}(x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 6x$：公式给出 $x = \frac{\pi}{3}$，而确实有 $\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$。当 $n = 2$ 时，公式同样给出 $\frac{\pi}{3}$（$y = \frac{4\pi}{3}$）。当 $n \to \infty$ 时，两条公式都趋向 $\frac{1}{2}\pi$，这是理所当然的，因为根会愈来愈密集。我们以细密的网格对 $n = 1, \ldots, 12$ 的 g 作了数值扫描。每一个预测值（例如 $n = 3$ 时的 $x = \frac{4\pi}{9} \approx 1.3963$）都是根，而 g 在该值与 $\frac{1}{2}\pi$ 之间保持同一符号。至于第一部分，随机抽取 2000 组满足 $Q^2 < 4R(P-R)$ 的三元组，所得的括号内式子在 $[-1, 1]$ 上全部没有零点。

常见错误

- 答 $x = \frac{1}{2}\pi$ 本身：对每一个 n，它都是 g 的根，但它在开区间（open interval）之外。
- 忘记了由 $\sin y = 0$ 得出的根，只保留 $\cos y = -\frac{1}{2}$。当 n 为偶数时，$y = n\pi - \pi$ 是一个根，虽然并非最大的一个。
- 只写 $\cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$，漏掉了 $\frac{4\pi}{3}$ 那一族解。这样在 n 为偶数时会得出错误答案。

STEP 之外

这个因式分解之所以行得通，是因为 $\sin mx / \sin x$ 永远是 $\cos x$ 的多项式（polynomial）：这些就是第二类切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials of the second kind）$U_{m-1}(\cos x)$。所以任何有限正弦级数（sine series）$\sum a_m \sin mx$ 都等于 $\sin x$ 乘以一个 $\cos x$ 的多项式，而数算它的零点，就变成数算多项式在 $[-1, 1]$ 内的根。这个想法是逼近理论（approximation theory）和傅里叶分析（Fourier analysis）中许多内容的基础。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）通过 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，为倍角公式（multiple-angle formulae）提供了一个优美的视角。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。