详细解答

STEP II 2001，第 3 题

纯数学 · 欧几里得几何

STEP II 2001，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s2-q3

关键思路

把长方体（cuboid）放进坐标系，令其中一个顶点位于原点，各棱沿坐标轴方向。这样每个顶点的位置向量（position vector）都一目了然，对角线只是这些向量之差，而两条对角线之间的夹角可直接由纯量积（scalar product）求得。体积与表面积之比是 λ 的一个简单有理函数（rational function），最后一部分则把关于 R 的条件转化为关于 λ 的条件，从而把前两个结果连系起来。

解答

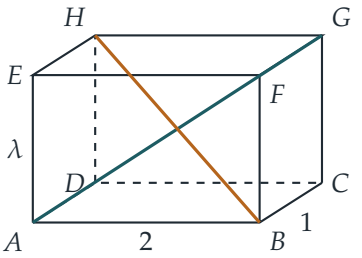
对角线之间的夹角

由于棱 AE、BF、CG、DH 垂直于各个面，各顶点处的角全是直角，因此可取坐标轴沿 AB、AD 和 AE 方向，并以 A 为原点：

$$A=(0,0,0),\quad B=(2,0,0),\quad C=(2,1,0),\quad D=(0,1,0),$$

而顶面就是把底面升高 λ：

$$E=(0,0,\lambda),\quad F=(2,0,\lambda),\quad G=(2,1,\lambda),\quad H=(0,1,\lambda).$$



两条对角线的方向向量（direction vector）为

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

长度均为 $\sqrt{5+\lambda^2}$，而且

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 3.$$

设 θ 为这两个向量之间的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2 - 3}{5+\lambda^2}.$$

? **想一想** 绝对值符号（modulus sign）是从哪里来的?

两条相交的直线形成两个角 θ 和 $\pi - \theta$，它们的余弦互为相反数。其中的锐角（当 $\lambda^2 = 3$ 时则为直角）就是余弦非负的那一个，所以

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \left|\frac{3-\lambda^2}{5+\lambda^2}\right|,$$

正是所求。

比值 R

体积为 $2 \times 1 \times \lambda = 2\lambda$。表面由面积分别为 2×1、$2\times\lambda$ 和 $1\times\lambda$ 的面各两个组成，所以表面积为 $2(2+3\lambda)$。因此

$$R = \frac{2\lambda}{2(2+3\lambda)} = \frac{\lambda}{2+3\lambda}.$$

由于 $\lambda > 0$，分母为正数，于是

$$R < \tfrac{1}{3} \iff 3\lambda < 2 + 3\lambda \iff 0 < 2,$$

而这显然成立。所以对任何可能的 λ，均有 $R < \frac{1}{3}$。（当 $\lambda \to \infty$ 时，$R \to \frac{1}{3}$，所以这个界不能再改进。）

最后一部分

同样因为 $2 + 3\lambda > 0$，可以把不等式两边同乘分母：

$$R \geq \tfrac{1}{4} \iff 4\lambda \geq 2 + 3\lambda \iff \lambda \geq 2.$$

现设 $\lambda \geq 2$。则 $\lambda^2 \geq 4 > 3$，所以 $\lambda^2 - 3 > 0$，绝对值符号可以去掉：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda^2 - 3}{\lambda^2 + 5} = 1 - \frac{8}{\lambda^2 + 5}.$$

写成这个形式，便可看出 $\cos\alpha$ 随 λ^2 增大而增大。由 $\lambda^2 \geq 4$ 得 $\lambda^2 + 5 \geq 9$，所以

$$\cos\alpha \geq 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

α 和 $\arccos\frac{1}{9}$ 都在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内，而余弦在这个区间上严格递减（strictly decreasing），所以由 $\cos\alpha \geq \frac{1}{9}$ 可得

$$\alpha \leq \arccos\tfrac{1}{9},$$

这正是要证明的结果。等号成立当且仅当 $\lambda = 2$，即 $R = \frac{1}{4}$。

验算

- 当 $\lambda^2 = 3$ 时，公式给出 $\cos\alpha = 0$。验算：$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + 3 = 0$，所以两条对角线确实互相垂直。
- 当 $\lambda \to \infty$ 时，长方体变成又高又窄的棱柱（prism），两条对角线都变得接近垂直，所以 $\alpha \to 0$；公式给出 $\cos\alpha \to 1$，与此吻合。
- 当 $\lambda = 2$ 时：体积为 4，表面积为 $2(2 + 4 + 2) = 16$，所以 $R = \frac{1}{4}$，而 $\cos\alpha = \frac{1}{9}$，所以 $\alpha \approx 83.6°$。以 10^5 个随机的 λ 值作数值检验，结果证实了夹角公式、$R < \frac{1}{3}$，以及每当 $R \geq \frac{1}{4}$ 时 $\alpha \leq \arccos\frac{1}{9}$。

常见错误

- 忘记加绝对值符号：当 $\lambda^2 < 3$ 时，向量 $\overrightarrow{AG}$ 与 $\overrightarrow{BH}$ 所成的是钝角，而所求的锐角是它的补角。
- 把最后一个不等式的方向弄反：余弦较大，角就较小，因为余弦在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递减。

STEP 之外

把物体放进坐标系，再用纯量积求角度，是向量几何的基本工具；在大学一年级的线性代数（linear algebra）课程中，它会推广为任意维数的内积（inner product）：$\mathbb{R}^n$ 中两个向量之间的夹角是用 $\cos\theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$ 来定义的，而柯西—施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）保证了这个值落在 $[-1, 1]$ 之内。有一道不错的练习：证明 n 维单位立方体的长对角线与每条棱所成的角的余弦为 $1/\sqrt{n}$，所以当 n 增大时，这个角趋向直角。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把这些概念讲解得十分清楚。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。