详细解答

STEP II 2001，第 2 题

纯数学 • 整数部分的求和

> **STEP II 2001，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q2

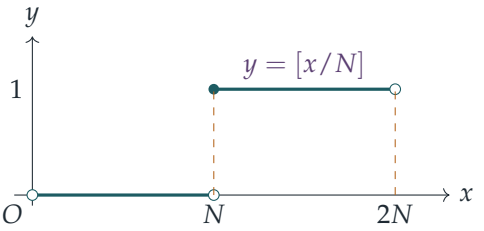
关键思路

指数 $[k/N]$ 看似棘手，但当 k 由 1 取到 $2N$ 时，它其实只有三个可能的值，而草图正好显示它在哪里跳升。弄清这一点之后，正负号 $(-1)^{[k/N]}$ 在 k 的三个区段上各自保持不变，于是每个和式都可以按区段拆开：第 (i) 部分拆成等差级数（arithmetic series），第 (ii) 部分拆成等比级数（geometric series）。唯一要小心的，是各区段的端点。

解答

草图

当 $0 < x < N$ 时，$0 < x/N < 1$，所以 $[x/N] = 0$。当 $N \le x < 2N$ 时，$1 \le x/N < 2$，所以 $[x/N] = 1$。图像是一级阶梯：跳升发生在 $x = N$，函数在该点已经取值 1；右端点 $x = 2N$ 并不包括在内（函数在该处的值会是 2）。



实心点表示包括该点，空心点表示不包括该点。

计算和式时，我们需要的是整数值 $k = 1, 2, \ldots, 2N$。从图像读出（并补上端点 $k = 2N$）：

$$[k/N] = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le N-1, \\ 1, & N \le k \le 2N-1, \\ 2, & k = 2N. \end{cases}$$

因此，$(-1)^{[k/N]}$ 在 $k \le N-1$ 时是 $+1$，在 $N \le k \le 2N-1$ 时是 -1，而在 $k = 2N$ 这单独一项又变回 $+1$。（当 $N = 1$ 时，第一个区段是空的；由于空和等于 0，以下所有公式仍然成立。）

> ? **想一想** 为甚么不能直接说首 N 项取 $+$ 号、其后 N 项取 $-$ 号?

因为跳升恰好发生在 N 的倍数上：$k = N$ 这一项已经有 $[k/N] = 1$，而最后一项 $k = 2N$ 有 $[k/N] = 2$，所以它是正的。把这两个端点处理正确，就是整道题的关键。

第 (i) 部分

按三个区段拆开，

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k = \sum_{k=1}^{N-1} k \;-\; \sum_{k=N}^{2N-1} k \;+\; 2N.$$

第一个和是 $\frac{1}{2}(N-1)N$。第二个和共有 N 项，由 N 到 $2N-1$，所以它等于 N 乘以首项与末项的平均值：$\frac{1}{2}N(3N-1)$。因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k &= \tfrac{1}{2}(N^2 - N) - \tfrac{1}{2}(3N^2 - N) + 2N \\ &= -N^2 + 2N = 2N - N^2, \end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

用同样的拆法，得

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} \;-\; \sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} \;+\; 2^{-2N}.$$

两个和都是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数。利用 $\sum_{k=a}^{b} 2^{-k} = 2^{-a}\bigl(1 - 2^{-(b-a+1)}\bigr)\big/\tfrac{1}{2} = 2^{1-a} - 2^{-b}$，

$$\sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} = 1 - 2^{1-N},$$

$$\sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} = 2^{1-N} - 2^{1-2N}.$$

所以

$$\begin{aligned} S_N &= 1 - 2^{1-N} - 2^{1-N} + 2^{1-2N} + 2^{-2N} \\ &= 1 - 4\cdot 2^{-N} + 3\cdot 2^{-2N}. \end{aligned}$$

设 $t = 2^{-N}$，上式就是 $1 - 4t + 3t^2$，可以漂亮地因式分解：

$$\boxed{S_N = 1 - \frac{4}{2^N} + \frac{3}{4^N} = \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)\left(1 - \frac{3}{2^N}\right).}$$

当 $N \to \infty$ 时，$2^{-N} \to 0$ 且 $4^{-N} \to 0$，所以

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1.$$

这个结果合情合理：随着 N 增大，正号区段 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ 愈来愈长，其和趋近 1；而负号区段的起点已经排得很后，它的总和大约是 2^{1-N}，可以忽略不计。

验算

- $N = 1$：各项为 $k = 1$（此时 $[1] = 1$）和 $k = 2$（此时 $[2] = 2$）。第 (i) 部分给出 $-1 + 2 = 1 = 2 - 1$，第 (ii) 部分给出 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$，与 $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ 相符。
- $N = 2$：对应 $k = 1, 2, 3, 4$ 的正负号依次为 $+, -, -, +$。于是 $1 - 2 - 3 + 4 = 0 = 4 - 4$，而 $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$。
- 我们以分数作精确计算，对 N 由 1 到 59 的每一个值验证了这两条公式。例如 $S_{50} \approx 0.999\,999\,999\,999\,996$。

常见错误

- 把 $k = N$ 归入正号区段，或者忘记最后一项 $k = 2N$ 的指数是 2，因而是正的。
- 数错 $\sum_{k=N}^{2N-1}$ 的项数：它共有 N 项，而不是 $N - 1$ 项。

STEP 之外

整数部分函数（integer-part function，又称下取整函数 floor function）在数论（number theory）中随处可见：经典的例子是勒让德公式（Legendre's formula），它指出整除 $n!$ 的质数 p 的最高次幂是 $\sum_{j\geq 1}[n/p^j]$。像第 (ii) 部分那样正负号按区段变化的和式，也是一个浅易的入门例子，让我们初步接触级数各项的重排（rearranging）与分组（grouping），而分析（analysis）课程会把这些做法严格化。想看看下取整函数如何大派用场，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门名著）是个绝佳的起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。