详细解答

STEP II 2001，第 13 题

概率与统计 · 连续分布与估计

STEP II 2001，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s2-q13

关键思路

题目直接给出了生存函数（survival function）$\mathrm{P}(T > t)$，所以令它等于 $\frac{1}{2}$ 便可求出中位数（median）；至于平均值（mean），则先求导得出密度函数，再积分。实验提供了样本中位数（九个由小至大排列的寿命中的第五个）和样本平均值，把它们与公式对应起来，便得到关于 α 和 k 的两条方程。两式相除可消去 k，余下一条只含 α 的方程。最后要求的是一个条件概率（conditional probability），而那里正有一个令人惊喜的结果等着我们。

解答

中位数与平均值

设 $S(t) = \mathrm{P}(T > t) = (1+kt)^{-\alpha}$，其中 $t \geq 0$。要使它由 1 下降至 0，必须有 $k > 0$。

中位数。中位数 M 满足 $\mathrm{P}(T > M) = \frac{1}{2}$，所以

$$(1+kM)^{\alpha} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + kM = 2^{1/\alpha} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2^{1/\alpha} - 1}{k}.$$

平均值。累积分布函数（cumulative distribution function）是 $F(t) = 1 - (1+kt)^{-\alpha}$，所以概率密度函数（probability density function）是

$$f(t) = F'(t) = \alpha k\,(1+kt)^{-\alpha-1}, \qquad t \geq 0.$$

然后用分部积分法（integration by parts），取 $u = t$ 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}$，于是

$v = -(1+kt)^{-\alpha}$，

$$m = \int_0^\infty t\,\alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-t(1+kt)^{-\alpha}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty (1+kt)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left[-\frac{(1+kt)^{1-\alpha}}{k(\alpha-1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

两个在无穷远处的极限都用到 $\alpha > 1$：$t(1+kt)^{-\alpha}$ 的表现类似 $t^{1-\alpha}/k^\alpha \to 0$，而 $(1+kt)^{1-\alpha} \to 0$。（若 $\alpha \le 1$，平均值便会是无限大，这正是题目坚持要求 $\alpha > 1$ 的原因。）所以

$$M = \frac{2^{1/\alpha}-1}{k}, \qquad m = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

估计 α 和 k

共有九个灯泡，第五个失效的灯泡正是九个顺序排列的寿命中居中的一个：它就是样本中位数（sample median）。所以我们估计 $M \approx 1000$，并由样本平均值得 $m \approx 2400$。

想一想 我们有两条方程和两个未知数，但 k 在两条方程中都出现。怎样才能单独求出 α?

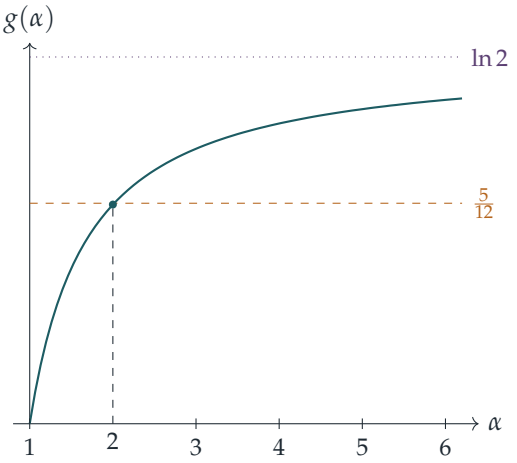
相除：由于 M 和 m 都与 $1/k$ 成正比，k 会被约去。由此得

$$\frac{M}{m} = (2^{1/\alpha}-1)(\alpha-1) \approx \frac{1000}{2400} = \frac{5}{12} \approx 0.4167.$$

把左方记作 $g(\alpha)$。当 $\alpha = 2$ 时，

$$g(2) = (\sqrt{2}-1)(2-1) = \sqrt{2}-1 \approx 0.4142,$$

这与 5/12 相差不到 0.003。要看出没有其他数值同样吻合，可留意 $g(1.9) \approx 0.396$ 及 $g(2.1) \approx 0.430$，所以 5/12 这个值介乎两者之间。事实上，g 由 $g(1) = 0$ 开始稳步递增，当 $\alpha \to \infty$ 时趋向 $\ln 2 \approx 0.693$（见图），所以它只会取 5/12 这个值一次，而且是在略大于 2 的某个 α 处。因此 $\alpha \approx 2$。



现在把 $\alpha = 2$ 代回任何一条公式。由平均值得

$$k = \frac{1}{m(\alpha - 1)} \approx \frac{1}{2400},$$

而由中位数得 $k = (\sqrt{2} - 1)/1000 \approx 4.14 \times 10^{-4}$。两者十分接近，于是

$$k \approx 4.2 \times 10^{-4} \text{ 每小时}.$$

条件概率

一个灯泡运作了 M 小时后再多运作 $m - M$ 小时，合共便运作了 m 小时。由于 $m > M$，事件 $\{T > m\}$ 包含于 $\{T > M\}$ 之内，所以

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = \frac{\mathrm{P}(T > m)}{\mathrm{P}(T > M)} = \frac{(1 + km)^{-\alpha}}{1/2} = \frac{2}{(1 + km)^{\alpha}}.$$

（严格来说，是在 M 小时那一刻发现灯泡仍在运作；对于连续的寿命，$T \geq M$ 与 $T > M$ 的概率相同。）惊喜来了：不论 k 是多少，都恰好有 $km = 1/(\alpha - 1)$，所以 $1 + km = \alpha/(\alpha - 1)$，而

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = 2\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

当 $\alpha = 2$ 时，这等于 $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$。所以概率的估计值是

$$\mathrm{P}(\text{再多运作} m - M \text{ 小时}) \approx \tfrac{1}{2}.$$

最后这一步完全用不着 k 的估计值。

验算

- 在中位数处，$S(M) = (2^{1/\alpha})^{-\alpha} = \frac{1}{2}$，与预期相符。随机选取 $\alpha > 1$ 和 $k > 0$，对 $S(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上作数值积分，结果与 $m = 1/(k(\alpha - 1))$ 吻合（回想对于非负的变量，有 $\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$，这正是我们计算过程中的第二个积分）。
- 准确地解 $g(\alpha) = 5/12$ 可得 $\alpha \approx 2.015$，这时条件概率是 $2(1 - 1/\alpha)^\alpha \approx 0.502$，所以把它约为 $\alpha = 2$ 几乎没有任何损失。
- 以 $\alpha = 2$、$k = 1/2400$ 模拟 400 000 个寿命（取 $T = (U^{-1/2} - 1)/k$，其中 U 在 $(0, 1)$ 上均匀分布），得出 $\mathrm{P}(T > m \mid T > M) \approx 0.501$。

常见错误

- 把 $\mathrm{P}(T > t)$ 当作累积分布函数，求导时漏掉负号，结果得出负的“密度”。
- 以 $\mathrm{P}(T > m - M)$ 作答，仿佛灯泡在时刻 M 重新开始计算寿命。这个分布并不具有无记忆性（memoryless；只有指数分布才有），所以条件 $T > M$ 是有影响的。
- 把第五个失效的时间当作平均值的估计，而不是中位数的估计。

STEP 之外

这是一种帕累托（Pareto）型分布，称为 Lomax 分布，是描述寿命和收入的标准模型，带有重尾（heavy tail）：$\mathrm{E}(T^r)$ 只在 $r < \alpha$ 时才是有限的。我们在这里所用的是*矩估计法*（method of moments；严格来说，是配对一个分位数和一个矩）：选取参数，使模型的概括统计量等于样本的概括统计量。大学一年级的统计学会把这个方法与最大似然估计（maximum likelihood）作比较，并探讨只凭九个灯泡得出的估计究竟有多准确。比值 $\mathrm{P}(T > s + t \mid T > s)$ 是可靠性理论（reliability theory）中所用的生存函数：在这里它随 s *递增*，所以旧灯泡比新灯泡更有可能继续运作下去。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入门）是很好的下一步读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。