详细解答

STEP II 2001，第 11 题

力学 · 抛体运动

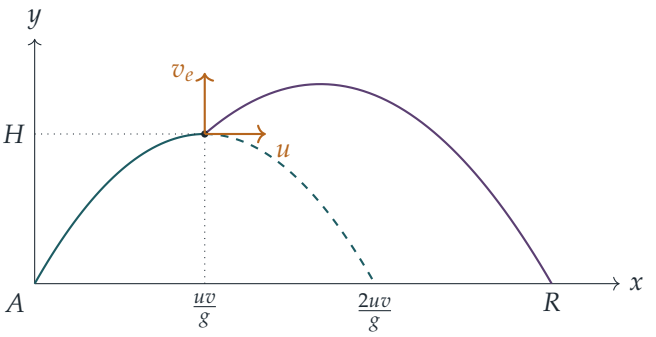
> **STEP II 2001，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q11

关键思路

以爆炸一刻为界，把整段飞行分成两段。爆炸之前，导弹是普通的抛体（projectile），最高点就是垂直速度为零之处。爆炸之后，碎片 P 是一个新的抛体，从该高度以速度 (u, v_e) 抛出，因此落地所需时间可由一条二次方程（quadratic）求得。至于第二部分，射程（range）是 v_e 的递增函数（increasing function），所以“$R > D$”就变成“v_e 大于恰好令 $R = D$ 的那个值”。

解答

我们把导弹和碎片 P 视为只受重力作用的质点（particle），并设地面为水平。取 A 为原点，x 轴沿水平方向，y 轴垂直向上。



虚线显示假如没有爆炸，导弹本来会落在哪里；紫色曲线则是 P 的路径。

P 的射程

爆炸之前。垂直速度为 $v - gt$，在 $t_1 = v/g$ 时变为零。此刻导弹的水平位移为

$$x_1 = ut_1 = \frac{uv}{g},$$

而它的高度，可由 $v^2 = 2gH$（末垂直速率为零）得出：

$$H = \frac{v^2}{2g}.$$

爆炸之后。碎片 P 从高度 H 出发，水平速度为 u，垂直速度为向上的 v_e。以爆炸一刻起计的时间为 t，它的高度是

$$y = H + v_e t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

当 $y = 0$ 时它落地：

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_e t - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^2t^2 - 2gv_e t - v^2 = 0.$$

把它看成 gt 的二次方程，

$$gt = v_e \pm \sqrt{v_e^2 + v^2}.$$

两根之积为 $-v^2 < 0$，所以其中一个根是负数。这个根代表在爆炸之前抛物线（parabola）与地面相交的时刻，与本题无关。因此爆炸之后的飞行时间是

$$t_2 = \frac{v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}}{g}.$$

水平速度自始至终都是 u，所以总水平距离是

$$R = \frac{uv}{g} + ut_2 = \frac{u}{g}\left(v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}\right),$$

亦即

$$\frac{gR}{u} = v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2},$$

这正是所需的结果。

$R > D$ 的条件

设

$$f(v_e) = v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}, \qquad k = \frac{gD}{u} - v = \frac{gD - uv}{u}.$$

那么 $R > D$ 等价于 $f(v_e) > k$。由于 $D > 2uv/g$，我们有 $gD > 2uv$，所以 $k > v > 0$。

? **想一想** 为甚么只需找出令 $R = D$ 的那一个 v_e 值就足够?

因为 f 是严格递增（strictly increasing）的：

$$f'(v_e) = 1 + \frac{v_e}{\sqrt{v_e^2 + v^2}} > 0,$$

这是由于当 $v \neq 0$ 时 $|v_e| < \sqrt{v_e^2 + v^2}$。（从物理上看，向上的冲击愈猛，$P$ 留在空中的时间就愈长。）所以若 $f(v_e^*) = k$，则 $f(v_e) > k$ 当且仅当 $v_e > v_e^*$。

要求出 v_e^*，解 $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$。两边平方得

$$v_e^2 + v^2 = k^2 - 2kv_e + v_e^2 \quad \Longrightarrow \quad v_e^* = \frac{k^2 - v^2}{2k} = \frac{(k-v)(k+v)}{2k}.$$

平方可能会引入增根（false root），所以我们要验证 $k - v_e^* \geq 0$：事实上 $k - v_e^* = \dfrac{k^2 + v^2}{2k} > 0$，所以 v_e^* 确实满足 $f(v_e^*) = k$。

现在把 k 代入：

$$k - v = \frac{gD - 2uv}{u}, \qquad k + v = \frac{gD}{u}, \qquad 2k = \frac{2(gD - uv)}{u},$$

所以

$$v_e^* = \frac{(gD - 2uv)\, gD/u^2}{2(gD - uv)/u} = \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right).$$

因此，由于 f 是递增的，只要

$$v_e > \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right),$$

便有 $R > D$，这就是所需的条件。事实上，以上论证说明这个条件也是必要的。注意因为 $k > v$，所以 $v_e^* > 0$，即确实需要一个向上的冲击。

验算

- 若 $v_e = 0$，公式给出 $gR/u = 2v$，所以 $R = 2uv/g$：这正是没有爆炸的抛体的一般射程，合乎预期。这也是题目假设 $D > 2uv/g$ 的原因，否则根本不需要任何冲击。
- 取 $u = v = 10$、$g = 10$ 及 $D = 30$，临界值为 $v_e^* = \frac{300}{20} \cdot \frac{100}{200} = 7.5$，于是 $gR/u = 10 + 7.5 + 12.5 = 30$，所以 $R = 30 = D$，恰好相等。
- 以数值方法逐步模拟这两段飞行，所得结果与射程公式相差约 10^{-9}；另外 10^5 个随机个案亦确认 $R > D$ 当且仅当 $v_e > v_e^*$。

常见错误

- 忘记爆炸之前已经走过的水平距离 uv/g，把 R 从爆炸点正下方起计，而不是从 A 起计。

- 把由最高点落地所需的时间又当作 v/g，忽略了新增的向上速度 v_e。
- 把 $\sqrt{v_e^2+v^2}=k-v_e$ 两边平方时，没有验证右边为非负，或者没有解释为何一个使等式成立的值可以化为一个不等式。

STEP 之外

爆炸过程中整个系统的动量守恒（conservation of momentum），所以即使 P 偏离了原来的抛物线，两块碎片的质心（centre of mass）仍然沿着原来的抛物线继续前进。内力不能改变质心的运动，这个原理正是大学一年级力学课程中火箭运动和碰撞的起点。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这两个课题都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。