详细解答

STEP II 2001，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP II 2001，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s2-q10

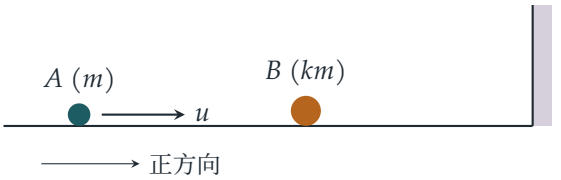
关键思路

这题是两次碰撞加一场追逐。第一次碰撞用的是标准的两条方程：动量守恒（conservation of momentum）和牛顿实验定律（Newton's experimental law）。B 从墙上反弹之后，唯一的问题是：正在折返的 B 能否与 A 相遇。这恰好在 A 朝墙方向的速度大于 B 的速度时发生，由此便得出关于 k 的不等式。至于能量部分，我们把动能（kinetic energy）写成 k 的函数，再与 $mu^2/27$ 比较。比较的结果原来是一个完全平方（perfect square）。

解答

第二次碰撞

把 A 和 B 当作光滑平面上的质点（particle），因此水平方向的冲量（impulse）只来自碰撞。取由 A 指向墙的方向为正方向。设 v_A 和 v_B 分别为 A 和 B 在第一次碰撞刚结束时的速度。



第一次碰撞。 动量守恒，而分离速率等于接近速率的 e_1 倍：

$$mv_A + km\,v_B = mu,$$
$$v_B - v_A = e_1 u.$$

把第二条方程乘以 k 再加到第一条方程，得 $(1+k)v_B = (1+e_1)u$。所以

$$v_B = \frac{(1+e_1)u}{1+k}, \qquad v_A = v_B - e_1 u = \frac{(1-ke_1)u}{1+k}.$$

由于 $v_B > 0$，B 继续向墙移动。A 则可能向前移动、静止或向后移动，视乎 $1-ke_1$ 的正负号而定。

墙。 B 以速率 v_B 撞墙，并以速率 $e_2 v_B$ 反弹，所以它的速度变为 $-e_2 v_B$。与此同时，A 继续以恒定速度 v_A 移动。注意 A 不可能先到达墙，因为 $v_A < v_B$（两者之差为 $e_1 u > 0$），而且 A 起初在 B 的后面。

> ? **想一想** 反弹之后，A 和 B 可能朝同一方向移动。我们怎样判断它们会否相遇？

反弹之后，B 位于 A 与墙之间，而且再没有其他作用施加于任何一个质点。所以两者之间的距离会缩短，当且仅当 A 的速度大于 B 的速度：

$$v_A > -e_2 v_B \iff v_A + e_2 v_B > 0.$$

若 $v_A > 0$，两者相向而行。若 $v_A \le 0$，则是 B 在追赶 A，而且只有在较快时才追得上。这一条不等式已涵盖两种情况。代入后，再乘以正数 $(1+k)/u$，得

$$1 - ke_1 + e_2(1+e_1) > 0 \iff k < \frac{1+e_2(1+e_1)}{e_1},$$

其中最后一步除以了 $e_1 > 0$。所以只要这条不等式成立，便会发生第二次碰撞，正如题目所求。（若等号成立，A 和 B 会以相同速度离开，永不相遇。）

动能

当 $e_1 = \frac{1}{3}$ 及 $e_2 = \frac{1}{2}$ 时，

$$v_A = \frac{(3-k)u}{3(1+k)}, \qquad e_2 v_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}u}{1+k} = \frac{2u}{3(1+k)}.$$

在 B 刚反弹之后，A 的速率仍是 $|v_A|$，而 B 的速率是 $e_2 v_B$。所以总动能为

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}km\,(e_2 v_B)^2 \\ &= \frac{mu^2}{18(1+k)^2}\left[(3-k)^2 + 4k\right] = \frac{mu^2\,(k^2-2k+9)}{18(1+k)^2}. \end{aligned}$$

现在与 $mu^2/27$ 比较，取公分母 $54(1+k)^2$：

$$\begin{aligned} T - \frac{mu^2}{27} &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\left[3(k^2-2k+9) - 2(1+k)^2\right] \\ &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}(k^2-10k+25) = \frac{mu^2\,(k-5)^2}{54(1+k)^2}. \end{aligned}$$

想一想 既然平方永不为负，条件 $k < 5$ 又有甚么用?

右边永不为负，而且只有在 $k = 5$ 时才等于零。所以当 $k < 5$ 时，我们有 $(k-5)^2 > 0$，因此

$$T > \frac{mu^2}{27},$$

正如题目所求。5 这个数值并非巧合。代入这些系数后，第一部分的上界是 $(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3})/\frac{1}{3} = 5$。所以 $k < 5$ 正是发生第二次碰撞的条件。当 $k = 5$ 时，两个质点在反弹后都以 $-u/9$ 移动，而能量恰好是 $mu^2/27$。

验算

- 取 $e_1 = 1$ 及 $k = 1$（质量相等，完全弹性）。这时 $v_A = 0$ 及 $v_B = u$，即大家熟悉的速度互换。上界变成 $k < 1 + 2e_2$，而只要 $e_2 > 0$，$k = 1$ 便满足这条件：折返的 B 必定会撞上静止的 A。
- 当 $k = 5$ 时，公式给出 $v_A = -\frac{u}{9}$ 及 $-e_2 v_B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2u}{9} = -\frac{u}{9}$，两个速度相等，与上文所说一致。
- 数值方面，以精确分数计算 k 由 0.001 至 4.999 的情况，比值 $T/(mu^2/27)$ 的最小值为 1.00000001，出现在 $k = 5$ 附近，而且始终大于 1。另外随机测试了 20 000 组 (k, e_1, e_2)，没有发现不等式与直接比较反弹后速度所得结果不一致的情况。

常见错误

- 要求 $v_A > 0$。A 即使正在向后移动，仍然可以被 B 追上。正确的条件是比较反弹后两者的速度。
- 忘记墙会把 B 的方向反转。它的速度变为 $-e_2 v_B$，而不是 $e_2 v_B$。
- 计算能量时用了 B 撞墙前的速率。题目要求的是刚反弹后的能量，所以 B 的速率是 $e_2 v_B$。

STEP 之外

牛顿实验定律是一个模型，用来描述撞击期间那短暂而剧烈的形变过程。恢复系数（coefficient of restitution）概括了相对动能损失了多少。在大学一年级的力学课程中，碰撞通常会在质心参考系（centre-of-mass frame）中分析。在这个参考系中，碰撞只是把相对速度反转并乘以 e，而损失的能量为 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$，其中 μ 是约化质量（reduced mass），

w 是接近速率。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics* 对这些概念有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。