详细解答

STEP II 2001，第 1 题

纯数学 · 二项式近似

> **STEP II 2001，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q1

关键思路

当 x 很小时，$(1-x)^{1/2}$ 的二项级数（binomial series）收敛（converge）得很快，所以只取首几项，便可得到极佳的有理近似（rational approximation）。诀窍在于如何选取 x：我们希望 $1-x$ 等于某个平方数乘以所求平方根的那个数，再除以十的某次幂。这样，$1-x$ 的平方根就是所求平方根的简单倍数。由于 $99 = 9 \times 11$ 和 $9999 = 9 \times 1111$，该怎样选几乎是不言而喻的。

解答

二次近似

由二项展开（binomial expansion），当 $|x| < 1$ 时，

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2} &= 1 + \tfrac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots .\end{aligned}$$

所以当 x 很小时，

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

我们同时求得第一个被略去的项 $-\frac{1}{16}x^3$，稍后估计误差（error）时会用到。事实上，首项之后的每一项都是负数（当 $n \geq 1$ 时，乘积 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n+1)$ 有 $n-1$ 个负因子，而 $(-x)^n$ 则带来 $(-1)^n$，合起来刚好剩下一个负号），所以当 $0 < x < 1$ 时，这个二次式是一个高估值（overestimate）。

第 (i) 部分

取 $x = \frac{1}{100}$，则

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{\sqrt{9\times 11}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{100}}.$$

利用二次近似，

$$\begin{aligned}\sqrt{11} &\approx \frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{200}-\frac{1}{80\,000}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{80\,000-400-1}{80\,000}\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{79\,599}{80\,000} = \frac{79\,599}{24\,000},\end{aligned}$$

这正是题目所要求的结果。

> ? **想一想** 第一个被略去的项是 $-\frac{1}{16}x^3$。这就是 $\sqrt{11}$ 的误差吗?

不完全是：那是 $\sqrt{1-x}$ 的近似值的误差，而我们之后还乘上了 $\frac{10}{3}$。因此 $\sqrt{11}$ 的误差约为

$$\frac{10}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{10}{48\times 10^6} = \frac{1}{4\,800\,000} \approx 2.08\times 10^{-7}.$$

所以，准确至 1 位有效数字（significant figure），误差为 2×10^{-7}，而 $\frac{79\,599}{24\,000}$ 略大于 $\sqrt{11}$。

第 (ii) 部分

我们照搬第 (i) 部分的技巧。由于 $1111\times 9 = 9999 = 10^4 - 1$，取 $x = \frac{1}{10\,000}$：

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{9999}{10\,000}} = \frac{3\sqrt{1111}}{100}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{1111} = \frac{100}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10\,000}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt{1111} &\approx \frac{100}{3}\left(1-\frac{1}{20\,000}-\frac{1}{8\times 10^8}\right) = \frac{100}{3}\cdot\frac{800\,000\,000-40\,000-1}{8\times 10^8}\\ &= \frac{100}{3}\cdot\frac{799\,959\,999}{8\times 10^8} = \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000} = \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000},\end{aligned}$$

其中最后一步约去了因子 3（799 959 999 的数字之和是 75，可被 3 整除）。

误差约为第一个被略去的项的 $\frac{100}{3}$ 倍：

$$\frac{100}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{10^4}\right)^3 = \frac{100}{48\times 10^{12}} \approx 2.08\times 10^{-12},$$

即大约 2×10^{-12}，符合题目的要求。所以一个合适的有理数是

$$\sqrt{1111} \approx \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000}\left(=\frac{799\,959\,999}{24\,000\,000}\right).$$

验算

- $79\,599/24\,000 = 3.316625$，而 $\sqrt{11} = 3.31662479\ldots$；两者相差 2.096×10^{-7}，与估计值 2.08×10^{-7} 吻合，亦印证了这个近似值偏大。
- $266\,653\,333/8\,000\,000 = 33.331666625$，而 $\sqrt{1111} = 33.33166662291\ldots$；我们以高精度准确计算两者之差，得出 2.0835×10^{-12}。
- 第 (ii) 部分的估计更为准确，因为当 x 较小时，下一个被略去的项 $-\frac{5}{128}x^4$ 相对于 x^3 项也较小。

常见错误

- 忘记把被略去的项乘以 $\frac{10}{3}$（或 $\frac{100}{3}$），以致得出的误差小了十倍或一百倍。
- 弄错 x^2 系数的正负号：由于是 $(-x)^2$，该项为 $\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$，而不是 $+\frac{1}{8}x^2$。
- 尝试选取 x 的值，使 $1-x$ 等于 1111 除以十的某次幂。这样的值并不小，级数收敛得太慢，根本帮不上忙。

STEP 之外

“误差大约等于第一个被略去的项”这个说法，可以用泰勒定理（Taylor's theorem）和拉格朗日余项（Lagrange form of the remainder）严格地表述：它给出误差的准确公式，当中含有一个位于 $(0, x)$ 内的未知点。由此我们可以得到确切的上界和下界（upper and lower bounds），而不仅仅是估计。把这些误差界严格地建立起来，是大学第一门分析（analysis）课程的标准内容；参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。