详细解答

STEP I 2001，第 9 题

力学 · 拦截与相对速度

STEP I 2001，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q9

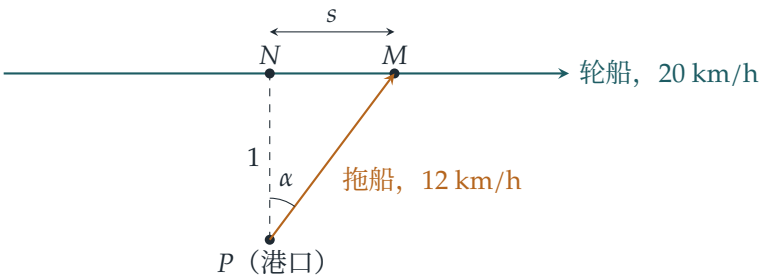
关键思路

要尽量迟出发，拖船就必须全速沿直线前进，所以真正要选择的，只是在轮船航线上的哪一点与它会合。对每一个可能的会合点，先求出拖船最迟可以在甚么时间出发而仍然及时赶到，然后对会合点求这个出发时间的最大值。只要把问题设置妥当，这就是一个单变量的最优化（optimisation）问题。

解答

建立模型

把轮船和拖船都视为质点（particle）。把港口 P 放在原点，并设轮船沿直线 $y = 1$ 向正 x 方向航行（距离以公里为单位，时间以小时为单位）。由 P 到航线的垂足（foot of the perpendicular）是 $N = (0, 1)$，即轮船最接近港口的一点。



假设两船在点 $M = (s, 1)$ 会合。轮船沿航线的位置是时间的线性函数（linear function），

所以它到达 M 的时间是

$$t_M = \frac{s-c}{20},$$

其中 c 是一个常数，由轮船的起始位置决定。（轮船仍在驶近，所以 c 小于我们会用到的任何会合位置。）

想一想 为甚么拖船必须全速沿直线前进?

如果拖船在时间 T 出发，并在时间 t_M 到达 M，它就以不超过 12 km/h 的速率走了至少等于直线距离 $PM = \sqrt{s^2+1}$ 的路程，所以 $t_M - T \geq \sqrt{s^2+1}/12$。以最高速率直驶往 M，等号便成立。任何较慢或较迂回的走法，都会迫使拖船提早出发。

因此，能够在 M 会合的最迟出发时间是

$$T(s) = \frac{s-c}{20} - \frac{\sqrt{s^2+1}}{12},$$

而我们要求的是 $T(s)$ 在所有 s 之中的最大值。

求出发时间的最大值

求导数（derivative），得

$$T'(s) = \frac{1}{20} - \frac{s}{12\sqrt{s^2+1}}.$$

令 $T'(s) = 0$，得

$$\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

这要求 $s > 0$。两边平方，$25s^2 = 9(s^2+1)$，所以 $s^2 = \frac{9}{16}$，$s = \frac{3}{4}$。

这是极大值，而且是全局最大值（global maximum）：$\sqrt{s^2+1}$ 是凸函数（convex function），所以 T（一个线性函数减去一个凸函数）是凹函数（concave function）。换一个说法，$\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ 随 s 递增，所以当 $s < \frac{3}{4}$ 时 $T'(s) > 0$，当 $s > \frac{3}{4}$ 时 $T'(s) < 0$。留意常数 c 已经消失：会合点与轮船从哪里出发无关。

所以拖船在越过 N 之后 $\frac{3}{4}$ 公里处与轮船会合，而它所走的距离是

$$PM = \sqrt{\tfrac{9}{16}+1} = \sqrt{\tfrac{25}{16}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{PM = \tfrac{5}{4} \text{ 公里} = 1.25 \text{ 公里}.}$$

拖船在海上航行 $\frac{5/4}{12} = \frac{5}{48}$ 小时，即 $6\frac{1}{4}$ 分钟。

几何解读

拖船的航向与 PN 成角 α，其中 $\sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha$ 正是两船速率之比 $12/20$。拖船的速度（velocity）是 $(7.2,\ 9.6)$，而它相对于轮船的速度是 $(7.2-20,\ 9.6) = (-12.8,\ 9.6)$。两者的点积（dot product）是 $-92.16 + 92.16 = 0$。在临界出发时间，拖船的速度与它相对于轮船的速度互相垂直。这是较慢的追赶者仅仅来得及拦截时的标准条件。

验算

- 以几个不同的轮船起始位置，在一个细密的会合点网格上作穷举搜索，$T(s)$ 的最大值总是出现在 $s = 0.75$，所以拖船所走的距离是 1.25 公里。
- 由最迟出发时间开始，以航向 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 用数值方法逐步模拟运动，拖船会到达轮船所在之处。只要迟 0.002 小时出发，无论取甚么航向，都不能驶到轮船 20 米以内。
- 合理性检查：假如拖船与轮船一样快，$\sin\alpha$ 就会是 1，会合点会跑到无穷远处。这是合理的，因为速率相同的拖船可以无止境地追着轮船跑。

常见错误

- 在轮船最接近港口的一点 N 与它会合（拖船所走的距离为 1 公里）。这样做是把拖船的距离减至最小，而不是把出发时间推到最迟：拖船向前多走一点，就能赚到时间，因为轮船还要航行一段才到那里。
- 只把拖船的航行时间 $\sqrt{s^2+1}/12$ 减至最小，而漏掉 $s/20$ 一项。要求最大值的量是出发时间，它同时牵涉两艘船。

STEP 之外

求到达时间之差的最大值，是最优控制（optimal control）或追逐问题（pursuit problem）的一个小例子。速率之比的条件 $\sin\alpha = 12/20$，与超音速飞机后方的马赫锥（Mach cone）是同一种几何：圆锥半顶角的正弦等于音速与飞机速率之比，而这里那艘慢的拖船，就扮演着声音追赶快速声源的角色。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）仔细讨论了相对速度（relative velocity）和参考系（frame of reference），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多 STEP 风格的力学最优化题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。