详细解答

STEP I 2001，第 8 题

纯数学 · 二阶线性方程

STEP I 2001，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q8

关键思路

把每个已知解代入方程，都会在每个 x 值处得到一条联系两个未知函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的方程。两个解便给出两条联立线性方程（simultaneous linear equations），我们可以像解两个未知数那样把 p 和 q 解出来。在最后一部分，中间部分所证明的线性（linearity）让我们可以把题目给出的两个解换成它们较简单的组合，而三角恒等式（trigonometric identities）令这些组合变得非常简单。

解答

求 p 和 q

对于 $y = x$，有 $y' = 1$ 及 $y'' = 0$，所以代入 $(*)$ 得

$$p(x) + x\,q(x) = 0. \tag{1}$$

对于 $y = 1 - x^2$，有 $y' = -2x$ 及 $y'' = -2$，所以

$$-2 - 2x\,p(x) + (1 - x^2)\,q(x) = 0. \tag{2}$$

由 (1) 得 $p(x) = -x\,q(x)$。把它代入 (2)，

$$-2 + 2x^2 q(x) + (1 - x^2)q(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)\,q(x) = 2.$$

由于 $1 + x^2 > 0$，我们可以相除，所以 $q(x) = 2(1 + x^2)^{-1}$，然后由 (1) 得 $p(x) = -x\,q(x) = -2x(1 + x^2)^{-1}$，正如题目所求。（我们从没有除以 x，所以结果对所有实数 x 都成立，包括 $x = 0$。）

任意组合 $ax + b(1 - x^2)$ 都是解

记 $L[y] = y'' + p\,y' + q\,y$。求导是线性的，所以若 $y = ay_1 + by_2$，其中 a, b 为常数，则

$$\begin{aligned} L[ay_1 + by_2] &= a(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1) + b(y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2) \\ &= a\,L[y_1] + b\,L[y_2]. \end{aligned}$$

取 $y_1 = x$ 及 $y_2 = 1 - x^2$，则 $L[y_1]$ 和 $L[y_2]$ 都等于零（这正是它们满足 $(*)$ 的意思），所以对所有常数 a 和 b，都有 $L[ax + b(1 - x^2)] = 0$。如果你想直接验证：$y = ax + b(1 - x^2)$ 有 $y' = a - 2bx$ 及 $y'' = -2b$，而

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + q\,y &= -2b - \frac{2x(a - 2bx)}{1 + x^2} + \frac{2(ax + b - bx^2)}{1 + x^2} \\ &= \frac{-2b(1 + x^2) - 2ax + 4bx^2 + 2ax + 2b - 2bx^2}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

最后一部分

刚才的论证完全没有用到 p 和 q 的具体形式：对于任何形如 $(*)$ 的方程，两个解的组合 $ay_1 + by_2$ 仍然是解。所以，如果 $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ 和 $\sin^2(\frac{1}{2}x^2)$ 都满足 $(*)$，它们的和与差也同样满足，

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) + \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = 1, \qquad \cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) - \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = \cos(x^2),$$

这里用了 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 和 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$，其中 $\theta = \frac{1}{2}x^2$。

> ? **想一想** 为甚么可以用 1 和 $\cos(x^2)$ 来代替题目给出的函数?

因为这一步是可逆的：题目给出的函数是 $\frac{1}{2}(1 + \cos x^2)$ 和 $\frac{1}{2}(1 - \cos x^2)$，所以 p 和 q 使这两个函数都成为解，当且仅当它们使 1 和 $\cos(x^2)$ 都成为解。我们没有损失任何信息，而导数却容易计算得多。

解 $y = 1$。这时 $y' = y'' = 0$，所以 $(*)$ 简化为 $q(x) \cdot 1 = 0$，得

$$q(x) = 0.$$

解 $y = \cos(x^2)$。由链式法则（chain rule）得 $y' = -2x\sin(x^2)$，再由积法则（product rule）得

$$y'' = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2).$$

当 $q = 0$ 时，$(*)$ 变成

$$-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\,p(x) = 0.$$

凡是 $x\sin(x^2)\neq 0$ 之处，我们都可以相除，于是

$$p(x)=-\frac{\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2)}{x\sin(x^2)}=-\frac{1}{x}-2x\cot(x^2).$$

所以 $p(x)=-\dfrac{1}{x}-2x\cot(x^2)$ 及 $q(x)=0$。

在 $x\sin(x^2)=0$ 的各点（即 $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{n\pi}$），p 的系数为零，所以方程对该处的 p 没有任何限制；事实上，我们求得的 p 在这些点趋向无穷。这并不是出错：在这些点上，题目给出的两个函数的导数都是零，所以它们不可能是一条性质良好、形如 $(*)$ 的方程的两个“独立”解，而 p 在该处必定是奇异（singular）的。

验算

- 作为第一部分的独立验算，两个解的朗斯基行列式（*Wronskian*）$W=y_1y_2'-y_2y_1'$ 满足 $W'=-pW$。取 $y_1=x$，$y_2=1-x^2$，得 $W=-2x^2-(1-x^2)=-(1+x^2)$，所以 $-p=W'/W=2x/(1+x^2)$，与我们求得的 p 吻合。至于最后一部分，解 1 和 $\cos(x^2)$ 给出 $W=-2x\sin(x^2)$，而同样有 $W'/W=1/x+2x\cot(x^2)=-p$。
- 数值上，在 $x=0.9$ 处，把题目给出的两个函数代入 $(*)$，并以有限差分（finite differences）计算导数，可迫使 $p(0.9)\approx -2.82465$ 及 $q(0.9)\approx 0$，与 $-1/0.9-1.8\cot(0.81)\approx -2.82465$ 相符。

常见错误

- 直接对 $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ 求导两次，结果迷失在繁复的代数运算之中。应先用倍角恒等式（double-angle identities），然后才求导。
- 把 (1) 除以 x 而得到 $q=-p/x$；这样做是可行的，但之后必须另外处理 $x=0$ 的情况。改为消去 p 便可避开这个问题。
- 忘记说明最后一部分中 p 的公式在哪些地方成立。

STEP 之外

这道题让我们一窥二阶线性微分方程（second-order linear differential equations）的理论：解构成一个二维向量空间（vector space），任意两个独立的解便可决定方程，而朗斯基行列式（连同阿贝尔（Abel）公式 $W'=-pW$）则用来衡量独立性。朗斯基行列式为零的点，例如本题的 $x=\pm\sqrt{n\pi}$，正是系数必定变得奇异之处。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）对这一切都有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。