详细解答

STEP I 2001，第 7 题

纯数学 · 凹性与微分方程

STEP I 2001，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q7

关键思路

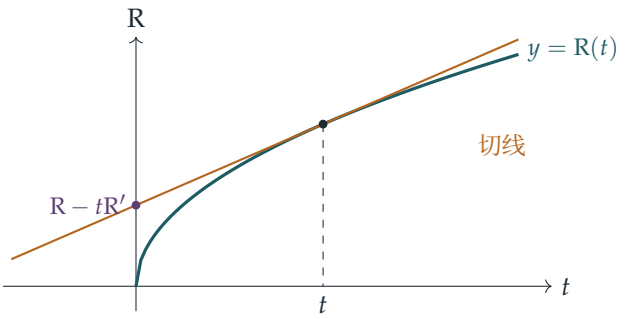
三个条件说明 R 由原点出发、一直上升，并且向下弯曲：它的图像是凹（concave）的。凹的图像位于它每一条切线（tangent）的下方，单凭这个几何事实就可得出 (i) 的不等式。第 (ii) 和 (iii) 部分则是可分离变量的微分方程（separable differential equations），因为 $\mathrm{H} = \mathrm{R}'/\mathrm{R}$ 正是 $\ln \mathrm{R}$ 的导数。一旦明确求出 R，我们便把它逐一对照各个条件检验，而 (i) 的不等式提供了一个快捷的方法来排除某个模型。

解答

首先，有一个事实会贯穿全题：由于 $\mathrm{R}(0) = 0$，而且 R 在 $t > 0$ 时严格递增（strictly increasing），所以当 $t > 0$ 时 $\mathrm{R}(t) > 0$。因此当 $t > 0$ 时，$\mathrm{H}(t)$ 有定义，且 $\mathrm{H}(t) > 0$。

第 (i) 部分

图像通过原点，斜率（gradient）为正，而且斜率随 t 增加而减少。



固定 $t > 0$。图像在时间 t 处的切线斜率为 $\mathrm{R}'(t)$，所以它与纵轴相交于高度

$$\mathrm{R}(t) - t\,\mathrm{R}'(t).$$

从图中可见这个截距（intercept）是正数，因为通过原点的曲线位于切线下方。要把这一点说得严谨，可对 R 在 $[0, t]$ 上应用中值定理（mean value theorem）：存在某个 c 满足 $0 < c < t$，使得

$$\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(0) = t\,\mathrm{R}'(c), \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{R}(t) = t\,\mathrm{R}'(c).$$

由于 $\mathrm{R}'' < 0$，函数 R' 严格递减，而 $c < t$ 给出 $\mathrm{R}'(c) > \mathrm{R}'(t)$。因此

$$\mathrm{R}(t) > t\,\mathrm{R}'(t),$$

这正正就是“切线的截距在原点之上”这句话。两边除以 $\mathrm{R}'(t) > 0$，得

$$t < \frac{\mathrm{R}(t)}{\mathrm{R}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{H}(t)},$$

这就是所要证明的结果。

（等价地说，切线与 t 轴相交于 $t - 1/\mathrm{H}(t)$，而这是负数。在宇宙学（cosmology）中，$1/\mathrm{H}$ 称为“哈勃时间”（Hubble time），这个结果说明：在任何减速膨胀的模型中，宇宙的年龄都比它的哈勃时间短。）

第 (ii) 部分

当 $t > 0$ 时，$\mathrm{R} > 0$，所以可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \mathrm{R}(t) = \frac{\mathrm{R}'(t)}{\mathrm{R}(t)} = \frac{a}{t}.$$

积分后得 $\ln \mathrm{R} = a \ln t + C$，所以

$$\mathrm{R}(t) = k\,t^a \qquad (t > 0),$$

其中 $k = \mathrm{e}^C > 0$。

现在利用 $k > 0$ 和 $t^a > 0$ 来检验各个条件：

- $\mathrm{R}'(t) = ka\,t^{a-1}$，它在 $t > 0$ 时为正，当且仅当 $a > 0$。
- $\mathrm{R}''(t) = ka(a-1)\,t^{a-2}$。已知 $a > 0$，它为负当且仅当 $a < 1$。
- 若 $a > 0$，则当 $t \to 0^+$ 时 $kt^a \to 0$，所以与 $\mathrm{R}(0) = 0$ 相容。（若 $a \le 0$，这个条件无论如何都不成立：kt^a 会趋向 $k \neq 0$，或者趋向无限大。）

所以条件 $(*)$ 成立，当且仅当

$$0 < a < 1.$$

这与第 (i) 部分吻合：在那里 $t < 1/\mathrm{H} = t/a$，由此必有 $a < 1$。

第 (iii) 部分

现在 $\mathrm{H}(t) = b/t^2$。首先，当 $t > 0$ 时 $\mathrm{H}(t) > 0$（见开首的说明），所以必须有 $b > 0$。若 $b \leq 0$，结论已经成立。

因此假设 $b > 0$。根据第 (i) 部分，每个 $t > 0$ 都必须满足

$$t < \frac{1}{\mathrm{H}(t)} = \frac{t^2}{b}, \qquad \text{即} \qquad t > b$$

（两边除以 $t > 0$ 并乘以 $b > 0$）。但对于每个满足 $0 < t \leq b$ 的 t，这个不等式都不成立。所以没有任何 b 的值能与 $(*)$ 相容。

> **想一想** 这样使用第 (i) 部分的结果是否合理?

合理。第 (i) 部分证明了*任何*满足 $(*)$ 的函数，对所有 $t > 0$ 都有 $t < 1/\mathrm{H}(t)$。所以，假如某个建议的 H 哪怕只在一个 t 值上违反这个不等式，就没有任何具有这个 H 的函数能满足 $(*)$。这是一个反证法（proof by contradiction）。

若想直接验证，可仿照 (ii) 解这个方程：$\ln \mathrm{R} = -b/t + C$，所以 $\mathrm{R}(t) = k\,\mathrm{e}^{-b/t}$，其中 $k > 0$。于是

$$\mathrm{R}'(t) = \frac{kb}{t^2}\,\mathrm{e}^{-b/t},$$

$$\mathrm{R}''(t) = kb\,\mathrm{e}^{-b/t}\left(\frac{b}{t^4} - \frac{2}{t^3}\right) = \frac{kb\,\mathrm{e}^{-b/t}}{t^4}\,(b - 2t).$$

当 $b > 0$ 时，$\mathrm{R}' > 0$，而且当 $t \to 0^+$ 时 $\mathrm{R}(t) \to 0$，所以头两个条件成立。但当 $0 < t < b/2$ 时 $\mathrm{R}''(t) > 0$，所以图像在原点附近弯向了错误的方向，$(*)$ 不成立。

验算

- 在 (ii) 中，取 $a = \frac{1}{2}$ 得 $\mathrm{R} = k\sqrt{t}$，正是草图中的形状：递增而且是凹的，并有 $t < 1/\mathrm{H} = 2t$。取 $a = 1$ 则得一条通过原点的直线，此时恰好有 $t = 1/\mathrm{H}$：这是 (i) 的边界情况。
- 在 (iii) 中取 $b = 1$、$k = 1$：数值上 $\mathrm{R}''(0.25) \approx 2.34 > 0$，而 $1/\mathrm{H}(0.5) = 0.25 < 0.5$，两者都违反 $(*)$。

我们用电脑以几个凹的测试函数检验了 (i)，以有限差分（finite differences）检验了 (ii) 和 (iii) 中的解及导数公式，并检验了 R'' 在 $t = b/2$ 处变号。

常见错误

- 在 (i) 中，只凭图像作论证。“曲线位于切线下方”需要理由：中值定理，加上 R' 递减。

- 在 (ii) 中，忘记了要有 $a > 0$ 才能保证 $\mathrm{R}' > 0$（以及 $\mathrm{R}(0) = 0$），结果只给出 $a < 1$。
- 在 (iii) 中，声称凹性在 t 很大时不成立。$b - 2t$ 的正负号显示，出问题的地方是在 t 很小的时候。

STEP 之外

第 (i) 部分是关于凸（convex）函数和凹函数的一个核心事实的特殊情况：一个可微（differentiable）函数是凹的，当且仅当它的图像位于所有切线的下方。这个事实是詹森不等式（Jensen's inequality）以及最优化（optimisation）中许多理论的基础。这里用中值定理的论证，是大学一年级分析学（analysis）的标准内容；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。在真实的宇宙学中，$a = \frac{2}{3}$ 对应由物质主导的爱因斯坦–德西特（Einstein–de Sitter）宇宙，它的年龄是哈勃时间的三分之二。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。