详细解答

STEP I 2001，第 6 题

纯数学 · 旋转曲面

STEP I 2001，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 4.8 节*切球形面包*中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/spherical-loaf.html

关键思路

把半圆 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 绕 x 轴旋转，便得到球体。在表面积（surface area）公式中，被积函数（integrand）$y\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$ 原来是*常数*，所以任何一片面包上的面包皮只取决于该片的厚度，而与它所在的位置无关。至于第二部分，我们从一端开始逐片吃掉（正如提示中的积分上下限 $-a$ 至 $-a + t$ 所暗示），因此剩下的是一个球冠（spherical cap）；比值 V/A 成为球冠厚度的二次函数，我们要求出它的最大值。

解答

面包皮与片数成正比

设面包的半径为 a，中心位于原点，则其表面可由

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \le x \le a,$$

绕 x 轴旋转而得。求导后，当 $|x| < a$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$，所以

$$y\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = y\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = y \cdot \frac{a}{y} = a,$$

其中用到 $x^2+y^2=a^2$ 及 $y>0$。因此，球体在平面 $x=x_1$ 与 $x=x_2$ 之间（其中 $-a\le x_1<x_2\le a$）的曲面面积为

$$2\pi\int_{x_1}^{x_2} a\,\mathrm{d}x = 2\pi a\,(x_2-x_1).$$

（被积函数只在端点 $x=\pm a$ 处没有定义，但在该处仍然有界，所以这个积分没有问题。）

现在假设面包被切成 N 片，每片厚度为 $h=2a/N$。每一片无论位于何处，所带的面包皮面积都恰好是 $2\pi ah$。所以，如果剩下 n 片，不论它们在甚么位置，剩余的面包皮面积都是

$$A = n\cdot 2\pi ah,$$

它与剩余的片数 n 成正比。这正是我们要证明的结果。（这是阿基米德（Archimedes）的古老结果：球体与其外切圆柱（circumscribing cylinder）在任意两个平行平面之间的面积相等。）

“脆皮”条件

面包是从一端开始逐片吃掉的，所以吃掉若干片之后，剩下的面包是由 $x=-a$ 至 $x=-a+t$ 的球冠，其中 t 满足 $0<t\le 2a$。由第一部分可知 $A=2\pi at$。至于体积，作代换 $u=x+a$，使得 $y^2=a^2-x^2=(a-x)(a+x)=(2a-u)u$：

$$V=\pi\int_{-a}^{-a+t}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^t(2au-u^2)\,\mathrm{d}u=\pi\Big(at^2-\frac{t^3}{3}\Big).$$

因此

$$\frac{V}{A}=\frac{\pi t^2\left(a-\frac{t}{3}\right)}{2\pi at}=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6a}=:f(t).$$

想一想 这个比值取决于已经吃掉多少。我们需要留意的是哪一个 t 值？

无论吃掉了多少片，条件都必须成立，所以我们需要 f 的最大值。利用配方法（completing the square），

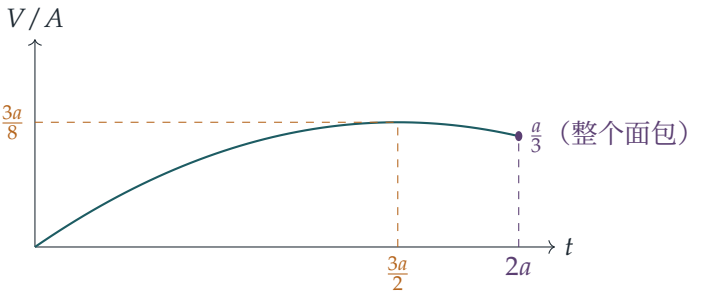
$$f(t)=\frac{3a}{8}-\frac{1}{6a}\Big(t-\frac{3a}{2}\Big)^2,$$

所以 f 在 $t=\frac{3a}{2}$ 时最大（这个值位于 $(0,2a]$ 之内），最大值为 $\frac{3a}{8}$。

$t=\frac{3}{2}a$ 是否真的会出现？会的，例如把面包切成 4 片并吃掉一片（或切成 $4m$ 片并吃掉 m 片）。一个面包若要作为平行切片面包而称得上“脆皮”，就必须在这样的切法下符合规定，所以需要

$$\frac{3a}{8}<1,\qquad \text{即}\qquad a<\frac{8}{3}=2\tfrac{2}{3}\text{ 米},$$

正如题目所求。反过来说，若 $a<\frac{8}{3}$，则对每一个 t 都有 $f(t)\le\frac{3a}{8}<1$，所以无论怎样切片，这个面包都是“脆皮”的。



上图显示 $a = 2$ 时的 $f(t)$：当我们向面包中央推进时，比值上升，其后回落，因为接近另一端时，我们加入了大量面包皮，却只加入少量面包。

验算

- 对整个面包而言，$t = 2a$ 给出 $f(2a) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$，与 $\frac{4}{3}\pi a^3/(4\pi a^2)$ 吻合。
- 取 $a = \frac{8}{3}$，切成 4 片。剩下 1, 2, 3, 4 片时，比值分别为 $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, 1, \frac{8}{9}$，所以吃掉一片之后比值恰好是 1，刚好不满足严格不等式（strict inequality）。
- 数值上，对面积公式作数值积分（quadrature），所得结果在随机选取的切片上都与 $2\pi a(x_2 - x_1)$ 相符；而当 $a = 2.66$ 时，切成不多于 200 片的每一种切法，比值都保持在 1 以下。

常见错误

- 只考虑整个面包：$a/3 < 1$ 给出 $a < 3$，这是必要条件，但弱得多。最坏的一刻是面包宽度的四分之一被吃掉的时候。
- 把平坦的切面也算作面包皮。面包皮只是原来的曲面，这也正是题目所给公式所量度的。

STEP 之外

被积函数为常数，这就是阿基米德的帽盒定理（hat-box theorem）：把球面横向投影到其外切圆柱上，面积保持不变。正因如此，在球面上均匀地选取一点，其高度服从均匀分布（uniform distribution），这个事实在概率和物理中经常用到。像这样的曲面积分（surface integral），以及映射在甚么情况下保持面积，都会在向量微积分（vector calculus）的入门课程中详细讨论；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以几何直观讲解复分析的著作）对球面的相关映射有一段优美的几何讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。