详细解答

STEP I 2001，第 5 题

纯数学 · 积分号下求导

> **STEP I 2001，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q5

关键思路

(i) 和 (ii) 的两个积分都可以直接积出，第二个要先作代换（substitution）$u = 1 + tx$。真正的重点在于题末的那句话：(ii) 的被积函数（integrand）是 (i) 的被积函数对 t 的导数（derivative），而两个答案之间也有同样的关系。由此看来，在积分号内对参数（parameter）t 求导，似乎可以与对 x 积分交换次序。再做一次，然后代入 $t = 1$，便得到所要的猜想（conjecture）。

解答

全题中 $t > 0$ 且 $0 \le x \le 1$，所以 $1 + tx \ge 1 > 0$，各个被积函数都不会趋向无穷大。

第 (i) 部分

由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+tx)^{-1} = -t(1+tx)^{-2}$，$(1+tx)^{-2}$ 的一个原函数（antiderivative）是 $-\dfrac{1}{t(1+tx)}$（这里用到 $t \neq 0$）。因此

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{t(1+tx)}\right]_0^1 = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t},$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

分子中的 x 令直接积分变得不便，所以我们设 $u = 1 + tx$。于是 $x = \dfrac{u-1}{t}$，$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{t}$，而积分上下限 $x = 0, 1$ 变成 $u = 1, 1+t$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\frac{u-1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\left(u^{-2}-u^{-3}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{t^2}\left[-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right]_1^{1+t} = -\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right).\end{aligned}$$

想一想 怎样才能不必把所有项通分展开，就把括号内的式子化简?

设 $w = \dfrac{1}{1+t}$，括号内的式子就是 $\frac{1}{2} - w + \frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}(1-w)^2$，是一个完全平方（perfect square）。又因为 $1 - w = \dfrac{t}{1+t}$，所以

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{(1+t)^2} = -\frac{1}{(1+t)^2},$$

这就是所求的结果。

猜想

把 x 固定，将被积函数看成 t 的函数：

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{-2} = -2x(1+tx)^{-3}.$$

所以 (ii) 的被积函数是 (i) 的被积函数对 t 的导数，正如 (ii) 的答案是 (i) 的答案的导数一样。这提示了以下法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

再应用一次，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-2x(1+tx)^{-3}\right) = 6x^2(1+tx)^{-4}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-(1+t)^{-2}\right) = 2(1+t)^{-3},$$

于是我们猜想，对于 $t > 0$，

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+tx)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

代入 $t = 1$，猜想的值为

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

验算

- 当 $t \to 0$ 时，(i) 的被积函数趋向 1，而答案 $\frac{1}{1+t}$ 也趋向 1；在 (ii) 中，被积函数趋向 $-2x$，其积分为 -1，与 $-\frac{1}{(1+t)^2} \to -1$ 吻合。
- 题目没有要求我们验证这个猜想，但验证起来很快：设 $u = 1 + x$，积分变成 $6\int_1^2 (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4})\,\mathrm{d}u = 6\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3}\right]_1^2 = 6\left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$。
- 用辛普森法则（Simpson's rule）计算最后一个积分，得 0.250000；另外取 25 个不同的 t 值，结果都与 $\frac{2}{(1+t)^3}$ 吻合至小数点后九位。

常见错误

- 在 (ii) 中漏掉由 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/t$ 而来的因子 $\frac{1}{t}$：这里共有*两个* $\frac{1}{t}$ 因子，一个来自 x，一个来自 $\mathrm{d}x$。
- 代换后没有把积分上下限改为 $u = 1$ 和 $u = 1 + t$。
- 对 $-(1+t)^{-2}$ 求导时得出 $-2(1+t)^{-3}$：两个负号互相抵消，所以猜想的值是正数（这也是必然的，因为被积函数是正的）。

STEP 之外

我们猜想出来的法则，就是*积分号下求导*（differentiation under the integral sign），又称莱布尼兹法则（Leibniz's rule）。实分析（real analysis）中有一条定理指出：只要 f 和 $\partial f/\partial t$ 在一个闭矩形上连续（continuous），这条法则便成立；本题中，对于 $0 \le x \le 1$ 以及任何区间 $[a, b]$（其中 $a > 0$）内的 t，这个条件都成立。重复同样的论证，可得对每一个 n 都有 $\int_0^1 \frac{x^n}{(1+tx)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}$。理查德·费曼（Richard Feynman）曾用这一招计算其他方法都束手无策的积分，并因此为人津津乐道。至于交换极限（limit）、导数与积分次序背后的理论，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。