详细解答

# STEP I 2001，第 3 题

纯数学 · 三次方程与判别式

**STEP I 2001，第 3 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q3

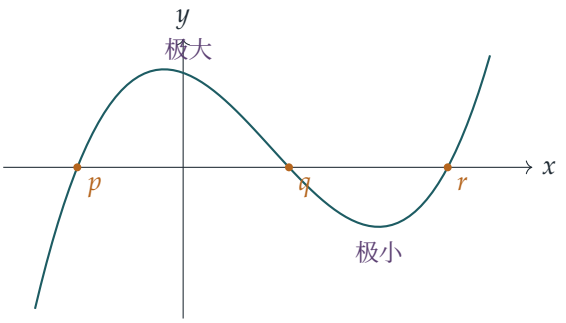
## 关键思路

一个有三个相异实根的三次多项式（cubic），在每两个相邻的根之间必定要转向，所以它的导数（derivative）——一个二次式——有两个相异实根。把“有两个相异实根”写成“判别式（discriminant）为正”，就得到第一个不等式。至于第二部分，题目给出的乘积是一个三次多项式，其系数正好就是目标不等式中的那些量，所以用第一部分的结果（或者配方（completing the square））便可完成。

## 解答

### 略图

展开得 $f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + \ldots$，所以当 $x \to \infty$ 时 $f(x) \to +\infty$，而当 $x \to -\infty$ 时 $f(x) \to -\infty$。图像只在 $p$、$q$ 和 $r$ 三处与 $x$-轴相交，而且由于每个根都是单根（simple root），$f$ 在每个根处都会变号：当 $x < p$ 时 $f < 0$，在 $(p,q)$ 上 $f > 0$，在 $(q,r)$ 上 $f < 0$，当 $x > r$ 时 $f > 0$。因此在 $p$ 与 $q$ 之间某处有一个局部极大值（local maximum），在 $q$ 与 $r$ 之间某处有一个局部极小值（local minimum）。$y$-截距为 $f(0) = -pqr$。




（图中是按 $p < 0 < q < r$ 的情况绘画的；无论各根位于何处，图像的形状都一样，只是 $y$-轴的位置有所不同。）

**第一个不等式**

完全展开，得

$$f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + (qr+rp+pq)x - pqr,$$

所以

$$f'(x) = 3x^2 - 2(p+q+r)x + (qr+rp+pq).$$

由于 $f(p) = f(q) = 0$，根据罗尔定理（Rolle's theorem），$f'$ 在 $p$ 与 $q$ 之间（不含端点）有一个根；同理，在 $q$ 与 $r$ 之间（不含端点）也有一个根。这两个区间互不重叠，所以二次方程 $f'(x) = 0$ 有两个相异实根。（不用罗尔定理的做法：$f'(p) = (p-q)(p-r) > 0$、$f'(q) = (q-p)(q-r) < 0$ 及 $f'(r) = (r-p)(r-q) > 0$，所以 $f'$ 在每个区间上都会变号。）

一个二次式有两个相异实根，当且仅当它的判别式为正，所以

$$4(p+q+r)^2 - 12(qr+rp+pq) > 0, \qquad \text{即} \qquad (p+q+r)^2 > 3(qr+rp+pq),$$

这正是所要证明的。

**第二个不等式**

展开得

$$(x^2+gx+h)(x-k) = x^3 + (g-k)x^2 + (h-gk)x - hk.$$

把它与 $f$ 的展开式比较：如果这个三次多项式的根是 $p, q, r$，则

$$p+q+r = -(g-k), \qquad qr+rp+pq = h-gk,$$

所以目标不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ 正好就是把第一个不等式应用于这个三次多项式的根。

*充分*（*sufficient*）。假设 $g^2 > 4h$。那么 $x^2 + gx + h$ 有两个相异实根 $\alpha < \beta$，而这个三次多项式有实根 $\alpha$、$\beta$、$k$。如果 $k$ 与两者都不相同，三个根便互不相同，由第一部分立即得出 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$。

**想一想** 如果 $k$ 刚好等于 $\alpha$ 或 $\beta$，以致各根并非互不相同，那又如何?

第一部分假设了 $p < q < r$，所以我们还需要多做一点工夫。恒等式（identity）

$$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq) = \tfrac{1}{2}[(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2]$$

显示，除非 $p = q = r$，否则左边必为正。由于 $\alpha \neq \beta$，三个根绝不会全部相等，所以不等式在这个情况下同样成立。

另有一个直接的做法，可以完全避开根。乘开得

$$(g-k)^2 - 3(h-gk) = g^2 + gk + k^2 - 3h = (k + \tfrac{1}{2}g)^2 + \tfrac{3}{4}(g^2 - 4h),$$

当 $g^2 > 4h$ 时，这是一个平方加上一个正数，因此为正。无论用哪一个方法，$g^2 > 4h$ 都是充分条件。

*非必要*（*not necessary*）。我们需要找出满足 $g^2 \leq 4h$ 而不等式仍然成立的数值。取 $g = 0$、$h = 1$、$k = 2$。那么 $g^2 = 0 \leq 4 = 4h$，但是

$$(g-k)^2 = 4 > 3 = 3(h-gk).$$

所以即使没有 $g^2 > 4h$，不等式也可以成立，这个条件并非必要。

**想一想** 第一部分明明需要三个实根，为甚么会这样?

第一部分其实只需要 $f'(x) = 0$ 有两个相异实根，这个要求较弱。这里的三次多项式 $(x^2+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ 只有一个实根，但 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$，所以它仍然有两个驻点（stationary point）。不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ 所说的，正正就是这个三次多项式有一个局部极大值和一个与之不同的局部极小值，不论它的图像是否与横轴相交三次。

## 验算

- 取 $p, q, r = 0, 1, 2$：$(p+q+r)^2 = 9 > 6 = 3(qr+rp+pq)$，而 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ 的根是 $1 \pm 1/\sqrt{3}$，一个在 $(0,1)$ 内，一个在 $(1,2)$ 内。
- 配方所得的公式显示，这个不等式的界限是最佳的，不能再改进：取 $g = 2$、$h = 1$（所以 $g^2 = 4h$）及 $k = -1$，得 $(g-k)^2 = 9 = 3(h-gk)$，是等式而不是严格不等式。这就是三次多项式 $(x+1)^3$，三个根全部相等。

- 我们用电脑以精确运算核对了两个恒等式和两个不等式，每个各用了 20 000 个随机有理数例子，另加例子 $g = 0$、$h = 1$、$k = 2$（得出 $4 > 3$）。

## 常见错误

- 把三次曲线上下颠倒地画：$x^3$ 的系数是 $+1$，所以图像向右上升。
- 忘记了 $k$ 是 $x^2 + gx + h$ 的根这个情况，这时第一部分不能照原样套用。
- 只用一个满足 $g^2 \leq 4h$ 的例子说明不等式成立，就称之为“充分”。一个例子证明的是*非必要*；要证明充分性，则须对所有 $g$、$h$、$k$ 给出证明。

## STEP 之外

$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq)$ 这个量，除了相差一个常数因子外，就是导数的判别式，而且它是各根的*对称函数*（*symmetric function*）：任何这类函数都可以用系数来表示，这就是为甚么这个不等式可以从根的形式转写成 $g$、$h$、$k$ 的形式。三次多项式本身的完整判别式 $\prod(p-q)^2$，决定了三个根是否全为实数；本题用的是它较弱的近亲。对称函数和判别式再往前走，就通往伽罗瓦理论（Galois theory）；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是一个很好的起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。