详细解答

STEP I 2001，第 2 题

纯数学 · 代数不等式

> **STEP I 2001，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q2

关键思路

处理不等式（inequality）时，不能把两边同乘一个正负未知的量，所以 (i) 的稳妥做法是把所有项移到同一边，然后因式分解（factorise）：这样答案便可从符号图（sign diagram）直接读出。在 (ii) 中，平方根会引诱我们把两边平方，但这只有在已知两边皆非负时才是合理的。全题的关键就在于时刻留意这个条件。

解答

第 (i) 部分

我们不能乘以 x，因为 x 可能是负数。我们改为乘以 x^2，由于 $x \neq 0$，它必定严格为正，所以不等号方向不变：

$$\begin{aligned} 1+2x-x^2 > \frac{2}{x} &\iff x^2+2x^3-x^4 > 2x \\ &\iff 0 > x^4-2x^3-x^2+2x \\ &\iff x\left(x^3-2x^2-x+2\right) < 0. \end{aligned}$$

这个三次式（cubic）可用分组法因式分解：

$$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

所以我们需要

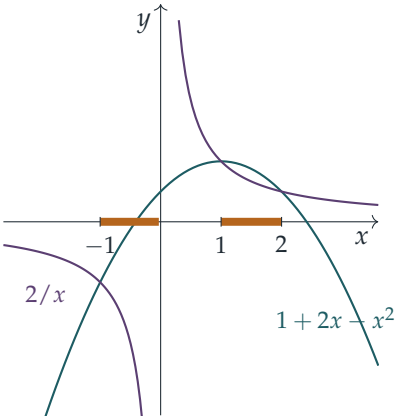
$$(x+1)\,x\,(x-1)(x-2) < 0.$$

这是一个首项系数（leading coefficient）为正的四次多项式（quartic），有四个单根（simple root）$-1, 0, 1, 2$，所以每当 x 越过一个根，它的正负号便交替一次：当 $x > 2$ 时为正，在

$(1,2)$ 上为负，在 $(0,1)$ 上为正，在 $(-1,0)$ 上为负，当 $x<-1$ 时为正。在各个根上，其值为 0，并不 <0（而且 $x=0$ 本来就已被排除）。因此

$$\boxed{-1<x<0 \quad \text{或} \quad 1<x<2.}$$

图像与此吻合：抛物线（parabola）$y=1+2x-x^2$ 位于双曲线（hyperbola）$y=2/x$ 上方的范围，恰好由它们在 $x=-1$、1、2 的交点划分，而在负的一侧，则只到双曲线在 $x=0$ 处急坠至 $-\infty$ 为止。



第 (ii) 部分

首先留意，$x\geq -\frac{10}{3}$ 除了给出 $3x+10\geq 0$ 之外，还给出 $x+4\geq \frac{2}{3}>0$，所以两个平方根在整个范围内都有定义。

两边皆非负，而对于 $a,b\geq 0$，我们有 $a>b \iff a^2>b^2$。所以我们可以把两边平方，既不会多出解，也不会丢失解：

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+10}>2+\sqrt{x+4} &\iff 3x+10>4+4\sqrt{x+4}+(x+4)\\ &\iff 2x+2>4\sqrt{x+4}\\ &\iff x+1>2\sqrt{x+4}.\end{aligned}$$

? **想一想** 我们可以直接再平方一次吗?

不能马上这样做。右边的 $2\sqrt{x+4}$ 是正数，但 $x+1$ 可能是负数，这时平方便可能把一个不成立的不等式变成成立的不等式。所以我们要分情况讨论。

▶ 若 $x+1\leq 0$，左边至多为 0，而右边严格为正。不等式不成立。

- 若 $x+1>0$，两边皆为正，所以平方这一步同样是可逆的：

$$\begin{aligned} x+1>2\sqrt{x+4} &\iff x^2+2x+1>4x+16 \\ &\iff x^2-2x-15>0 \\ &\iff (x-5)(x+3)>0, \end{aligned}$$

  这在 $x>5$ 或 $x<-3$ 时成立。结合 $x>-1$，只余下 $x>5$。

因此

$$\boxed{x>5.}$$

验算

- 在 $x=5$：$\sqrt{25}=5$ 而 $2+\sqrt{9}=5$，所以该处等号成立，这正是边界上应有的情况。在 $x=12$：$\sqrt{46}\approx 6.78>2+4=6$。在 $x=0$：$\sqrt{10}\approx 3.16<4$。
- 在 (i) 中，$x=1.5$ 给出 $1.75>1.33$，$x=-0.5$ 给出 $-0.25>-4$，两者皆成立；$x=0.5$ 给出 $1.75<4$，不成立。
- 我们用电脑对两个不等式各自在 2×10^5 个随机点上作了测试，另加上与每个边界相距不超过 10^{-6} 的点，结果与上述答案完全一致。

常见错误

- 把 (i) 乘以 x，却没有分开 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况。这样会丢失区间 $(-1,0)$，或者把该处的答案弄反。
- 把 $x+1>2\sqrt{x+4}$ 平方，却没有要求 $x+1>0$。这样会得出多余的区间 $-\frac{10}{3}\le x<-3$；试把 $x=-3.2$ 代入原式，便可看到它并不成立（$\sqrt{0.4}\approx 0.63<2+\sqrt{0.8}$）。

STEP 之外

(ii) 中的原则是：一个运算只有在所涉及的数值上是递增函数（increasing function）时，才会保持不等式成立。这正是分析学家处理不等式的起点：$t\mapsto t^2$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，但在 $\mathbb{R}$ 上则不然。乘积的符号图可推广为以下事实：连续函数（continuous function）只有经过零才能改变正负号，这就是介值定理（intermediate value theorem）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门书）对这两点都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。