详细解答

STEP I 2001，第 14 题

概率与统计 • 随机排序

STEP I 2001，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q14

本题在 *Beyond STEP* 第 12.12 节何时停止寻找中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/secretary.html

关键思路

不要考虑整个面试次序，只需考虑个别候选人排在哪个位置。首 n 人中的最佳者就是全体最佳者，当且仅当最优秀的候选人在首 n 名接受面试的人之中；而根据对称性（symmetry），最优秀的候选人落在 N 个位置中任何一个的可能性均等。第 (ii) 部分只需多考虑一种情况，或者巧妙地利用补事件（complement）。

解答

按名次为候选人编号：候选人 1 是全体最佳，候选人 2 是第二佳，如此类推。由于全部 $N!$ 种次序的可能性均等，每位候选人占据任何指定位置的可能性均等，而首 n 场面试所见的候选人组成的集合，是 $\binom{N}{n}$ 个大小为 n 的子集（subset）中任何一个的可能性亦均等。以下一律假设 $1 \leq n \leq N$。

第 (i) 部分

设 A 为候选人 1 在首 n 名接受面试的人之中这一事件（event）。若 A 发生，候选人 1 必定是首 n 人中的最佳者；若不发生，首 n 人中的最佳者就是比候选人 1 逊色的人。因此我们所求的事件正正就是 A。

候选人 1 落在 N 个位置中每一个的可能性均等，而其中 n 个位置属于首 n 个，所以

$$\mathrm{P}(\text{首}n\text{ 人中的最佳者是全体最佳}) = \frac{n}{N}.$$

第 (ii) 部分

现在取 $N \geq 2$，使第二佳的候选人存在。首 n 人中的最佳者是全体最佳或第二佳，当且仅当

- 候选人 1 在首 n 人之中（事件 A），或
- 候选人 1 不在首 n 人之中，但候选人 2 在。

> ? **想一想** 在第二种情况中，我们怎样知道首 n 人中的最佳者是候选人 2，而不是更优秀的人?

比候选人 2 优秀的只有候选人 1，而在这种情况下他并不在较早接受面试的人之中。反过来说，若 1 和 2 都不在首 n 人之中，则首 n 人中的最佳者名次为 3 或以下。所以上述两种情况合起来正正就是我们所求的事件，而且两者互斥（mutually exclusive）。

由第 (i) 部分，第一种情况的概率为 $\frac{n}{N}$。至于第二种情况，$\mathrm{P}(A') = \frac{N-n}{N}$，而已知候选人 1 在最后 $N-n$ 个位置的其中之一时，候选人 2 落在余下 $N-1$ 个位置中任何一个的可能性均等，其中 n 个属于首 n 个位置。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{首}n\text{ 人中的最佳者是全体第一或第二}) &= \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N}\cdot\frac{n}{N-1}\\ &= \frac{n\big[(N-1)+(N-n)\big]}{N(N-1)}\\ &= \frac{n(2N-n-1)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

*另一方法*是利用补事件：所求事件不发生，当且仅当较早接受面试的 n 名候选人全部来自名次为 3 至 N 的 $N-2$ 名候选人，其概率为

$$\frac{\binom{N-2}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)},$$

而 $N(N-1) - (N-n)(N-n-1) = 2Nn - n^2 - n = n(2N-n-1)$，得出相同的答案。

$N = 4$、$n = 2$ 的情况

按公式，(i) 的答案是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，(ii) 的答案是 $\frac{2\cdot 5}{4\cdot 3} = \frac{5}{6}$。

要列出各种可能性，留意到重要的只是哪两名候选人最先接受面试。$\binom{4}{2} = 6$ 个组合中的

每一个，都恰好由 $2! \times 2! = 4$ 种次序产生（全部共 24 种次序；先排好首两人，再排好后两人），所以这六个组合的可能性均等：

最先接受面试的两人	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
其中的最佳者	1	1	1	2	2	3

首两人中的最佳者是全体最佳的情况占 3 种（共 6 种），概率为 $\frac{1}{2}$；是全体最佳或第二佳的情况占 5 种（共 6 种），概率为 $\frac{5}{6}$。两者都与公式吻合。

验算

- $n = N$：我们见过所有人，所以两个概率都应该是 1。果然 $\frac{N}{N} = 1$ 而 $\frac{N(N-1)}{N(N-1)} = 1$。
- $n = 1$：第一名候选人是均匀随机选出的一人，所以 (ii) 的答案应该是 $\frac{2}{N}$；公式给出 $\frac{2N-2}{N(N-1)} = \frac{2}{N}$。
- (ii) 的答案不小于 (i) 的答案，因为 $2N - n - 1 \geq N - 1$。
- 把全部 $N!$ 种次序逐一列举，对 $N \leq 7$ 及每个 n 的结果都与两条公式完全吻合（例如 $N = 5$、$n = 2$ 给出 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{7}{10}$）。

常见错误

- 在 (ii) 中忘记了“全体第二佳”只在全体最佳者*不*在首 n 人之中时才算数；直接把 $\frac{n}{N} + \frac{n}{N}$ 相加会重复计算。
- 以候选人 1 的位置为条件（conditioning）之后，仍对候选人 2 使用 $\frac{n}{N}$：候选人 1 的位置一旦确定，就只剩下 $N - 1$ 个位置。

STEP 之外

这正是著名的*秘书问题*（secretary problem）的设置：假如你必须即场决定取录或拒绝每名候选人，最佳策略是先观察首 n 人，然后取录其后第一名比他们全部都优秀的候选人；把第 (i) 部分的论证加以推广，可以证明最优的 n 大约是 N/e，成功的概率约为 $1/e$。这里所用的对称性论证（“每名候选人落在任何位置的可能性均等”）是研究随机排列（random permutation）的起点。Blitzstein and Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门教科书）对这类对称性论证有十分精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。