详细解答

STEP I 2001，第 12 题

概率与统计 • 树形图

> **STEP I 2001，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q12

关键思路

一切取决于仔细记录谁知道甚么。一名学生要知道某人已听过谣言，只有两种情况：那人把谣言告诉了他，或者他把谣言告诉了那人；没有人会透露自己是从谁那里听来的。只要记下每名学生在每个阶段所知道的事，树形图（tree diagram）其实很小：每次分支都是在两个人之间选择，所以只有八条路径，而且结果它们的可能性全部相等。

解答

设置

以 A、B、C、D 表示四名学生。在任何阶段，学生 X 知道已听过谣言的人包括：X 自己、曾把谣言告诉 X 的人，以及 X 曾把谣言告诉的人。当 X 听到谣言时，X 会在这个集合以外的人当中均匀随机（uniformly at random）地选一人。如果这个集合已包含全部四名学生，谣言便在 X 处停止。

开始时，A 已告诉 C，所以 A 知道 $\{A, C\}$，而 C 知道 $\{A, C\}$。

树形图

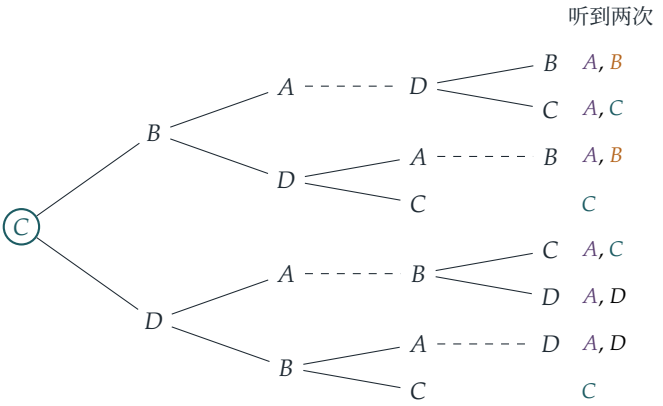
C 会略过 A，告诉 B 或 D，概率（probability）各为 $\frac{1}{2}$。先看分支 $C \to B$。这时 C 知道 $\{A, B, C\}$，而 B 知道 $\{B, C\}$（不包括 A，因为 C 没有说谣言从何而来）。所以 B 会告诉 A 或 D，概率各为 $\frac{1}{2}$。

- $B \to A$。Arthur 现在知道 $\{A, B, C\}$，所以他必须告诉 D，之后 Arthur 便知道人人都已听过。D 只知道 $\{A, D\}$，所以 D 会告诉 B 或 C，概率各为 $\frac{1}{2}$。无论是哪一个，听

者的集合都会齐全：B 本来已知道 $\{A, B, C\}$，C 亦然，而两人此时都得知 D 已听过。于是谣言停止。

- $B \to D$。这时 B 知道 $\{B, C, D\}$，而 D 知道 $\{B, D\}$，所以 D 会告诉 A 或 C。
  - $D \to C$：C 本来已知道 $\{A, B, C\}$，现在又得知 D 已听过，所以谣言停止。Arthur 始终没有再次听到谣言。
  - $D \to A$：Arthur 知道 $\{A, C, D\}$，所以他告诉 B，后者随即知道四人都已听过。谣言停止。

分支 $C \to D$ 的情况相同，只是 B 与 D 的角色互换。以下是整个树形图。除了以虚线表示的必然步骤（概率为 1）外，每条分支的概率都是 $\frac{1}{2}$。



每条通往树叶的路径都恰好包含三次概率为 $\frac{1}{2}$ 的选择（必然步骤只贡献因子 1），所以八个结果的概率各为 $\frac{1}{8}$。右方的标记显示在该路径上谁听到谣言两次。（在每条路径上，一名学生最多听到两次。）

> **想一想** 为甚么 B 刚从 C 那里听到谣言，却不知道 Arthur 已听过？

因为 C 不会说是谁告诉自己的。B 所能推断的，只是 C 已听过谣言。正是这一点令谣言得以继续流传：在 $C \to B \to A$ 这条分支上，Arthur 被告知一件他早已知道的事。

Arthur 再次听到谣言

除了两条短路径 $C \to B \to D \to C$ 和 $C \to D \to B \to C$ 之外，Arthur 在每条路径上都会再次听到谣言。所以

$$\mathrm{P}(\text{Arthur 再次听到谣言}) = 1 - 2 \times \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4},$$

正如所求。

Bertha 与 Chandra

Bertha 只在路径 $C \to B \to A \to D \to B$ 和 $C \to B \to D \to A \to B$ 上听到两次，所以

$$\mathrm{P}(\text{Bertha 听到两次}) = \tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

Chandra 在四条路径上听到两次：树形图的上下两半各有两条（$C \to B \to A \to D \to C$、$C \to B \to D \to C$、$C \to D \to A \to B \to C$ 和 $C \to D \to B \to C$），所以

$$\mathrm{P}(\text{Chandra 听到两次}) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

Chandra 比 Bertha 更有可能再次听到谣言，是因为 Chandra 很早便听到：在传话链中较后才被告知的人并不知道 Chandra 已听过，所以直到最后 Chandra 仍然是可能被告知的对象。

验算

根据 B 与 D 之间的对称性（symmetry），Delilah 听到两次的概率也应是 $\frac{1}{4}$，而树形图中确有两条这样的路径。各结果的概率之和正确：八片等可能的树叶，总概率为 1。以电脑对整个过程作精确枚举，得出 $\frac{3}{4}$、$\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$；而模拟（simulation）200 000 次谣言传播，则得出 0.750、0.250 和 0.501。

常见错误

- 让听者知道传话链中更早的每一个人。其实传递下去的只有告知者的身分；假如人人都掌握全部信息，谣言便永远不会回到 Arthur 那里。
- 忘记*告知者*同样会得知一些事情：告诉 Y 之后，X 便知道 Y 已听过谣言，而 Arthur 的步骤之所以是必然的，正是这个缘故。
- Arthur 一再次听到谣言便把树形图停下。其后的分支对 Bertha 和 Chandra 的计算是必需的。

STEP 之外

这个谣言是四名学生之间的一个随机漫步（random walk），其规则取决于过往历史，而这里以每名学生所知道的事来记录历史。只要把状态设置得足够丰富，使下一步只取决于当前状态，它便成为一条*马可夫链*（Markov chain），亦即随机过程（random processes）入门课程的核心对象；谣言模型和传染病模型是它的经典应用。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率论入门）对马可夫链的讲解，程度恰到好处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。