详细解答

STEP I 2001，第 11 题

力学 · 弹性绳与能量

STEP I 2001，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

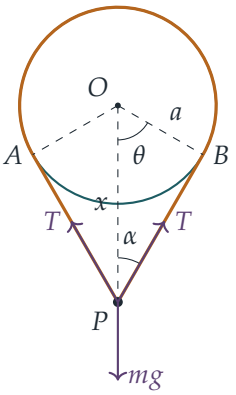
step.maths.org/questions/01-s1-q11

关键思路

质点把弹性带向下拉之后，弹性带大部分长度仍然贴在圆柱上，并在两侧沿切线方向离开圆柱，再笔直地连到质点。因此，整个问题归结为由圆外一点向圆所作两条切线（tangent）的几何。由于圆柱是光滑的，弹性带上各处的张力（tension）都相同，所以用总伸长量（extension）代入胡克定律（Hooke's law）便可求得张力。之后，第 (i) 部分是能量问题（质点在最低点瞬时静止），第 (ii) 部分是力的问题（速率最大即加速度为零）。

解答

我们把质点视为点质量，把弹性带视为轻而有弹性（遵从胡克定律），并把圆柱视为光滑。设 O 为横截面的圆心，并设质点 P 位于 O 下方距离 x 处，其中 $x \geq a$。弹性带在 A 和 B 两点离开圆，其中 PA 和 PB 为切线。



几何关系与张力

三角形 OAP 在 A 处为直角（切线垂直于半径），所以

$$PA = PB = \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{x},$$

其中 $\theta = \angle AOP$，而 $\alpha = \angle APO$，即每段笔直的弹性带与铅垂线所成的角。除了最接近 P 的一段圆心角为 2θ 的弧 AB 之外，弹性带处处与圆接触，所以它的长度是

$$L = (2\pi a - 2a\theta) + 2\sqrt{x^2 - a^2}.$$

自然长度（natural length）为 $2\pi a$，所以伸长量是

$$e(x) = 2\left(\sqrt{x^2 - a^2} - a\theta\right), \qquad \theta = \arccos\frac{a}{x}.$$

由于圆柱是光滑的，沿弹性带方向没有摩擦力，所以张力 T 处处相同，而根据胡克定律，$T = \dfrac{\lambda e}{2\pi a}$。

当 $x = 2a$ 时，我们有 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$，$\alpha = \frac{\pi}{6}$，而 $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a$。因此

$$e(2a) = 2\left(\sqrt{3}\,a - \frac{\pi a}{3}\right) = \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

第 (i) 部分

释放时，质点位于圆柱的底部，即 $x = a$，弹性带未被拉长，质点处于静止。到了 $x = 2a$，质点再次静止（它不再往下掉），所以在这两个时刻它都没有动能（kinetic energy）。圆柱是光滑的，所以没有能量损失，重力势能（gravitational potential energy）的减少等于弹性势能（elastic energy）的增加。质点下降了距离 $2a - a = a$，而自然长度为 $2\pi a$、伸长量为 e 的弹性带，其弹性势能为 $\dfrac{\lambda e^2}{2 \cdot 2\pi a}$。所以

$$mga = \frac{\lambda}{4\pi a} \cdot \frac{4a^2}{9}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)^2 = \frac{\lambda a\left(3\sqrt{3} - \pi\right)^2}{9\pi},$$

由此得

$$\lambda = \frac{9\pi mg}{\left(3\sqrt{3} - \pi\right)^2},$$

正如所求。

> **想一想** 弹性带有一部分绕在圆柱上，对整条弹性带使用弹性势能公式，这样做合理吗？

合理。由于圆柱是光滑的，无论是否绕在圆柱上，整条弹性带的张力都相同，因而每单位长度的伸长也相同。弹性带的表现，与一条自然长度为 $2\pi a$、总伸长量为 e 的弹性绳完全一样，而这正是公式 $\lambda e^2/(2l)$ 所描述的情况。

第 (ii) 部分

加速度为零时，速率最大，也就是说，作用于质点的合力为零。在水平方向，两个张力因对称而互相抵消。在 P 处沿铅垂方向分解，

$$2T\cos\alpha = mg.$$

当 $x = 2a$ 时，$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sqrt{3}\,T = mg$，得 $T = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$。利用胡克定律和上面求得的伸长量，

$$T = \frac{\lambda}{2\pi a}\cdot\frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{\lambda\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3\pi}.$$

令 T 的两个表达式相等，

$$\lambda = \frac{3\pi mg}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}\,\pi mg}{3\sqrt{3}-\pi}.$$

? **想一想** 我们怎样知道这是速率的极大值，而不仅仅是一个驻点?

当 x 增加时，e 会增加（每段笔直的弹性带变长的速度，比弧长 $a\theta$ 缩短的速度快），而 $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2/x^2}$ 也会增加，所以向上的力 $2T\cos\alpha$ 由 0 开始持续增加。质点在 $x = 2a$ 上方时，向下的合力为正，在其下方时则为负，所以质点一直加速至 $x = 2a$，之后便减速。

验算

- 一个巧妙的一致性检验：对 L 求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \dfrac{2a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-a^2}}{x} = 2\cos\alpha$。所以弹性势能的变化率 $T\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ 等于 $2T\cos\alpha$，即向上的力。(i) 的能量方法与 (ii) 的力学方法互相吻合。
- 以数值计算，(i) 中 $\lambda \approx 6.70\,mg$，(ii) 中 $\lambda \approx 2.65\,mg$。(ii) 中的弹性带较弱，这是合理的：在那里质点到达 $x = 2a$ 时仍在运动，并会继续越过该点，而在 (i) 中，较硬的弹性带已经令质点停下来。
- 由 $x = a$ 处的静止状态出发，以数值方法逐步求解运动方程 $m\ddot{x} = mg - 2T\cos\alpha$，取 λ 的第一个值时，最低点在 $x = 2.0000a$；取第二个值时，速率最大的位置在 $x = 2.0000a$。

常见错误

- 忘记了有一部分弹性带离开了圆柱：伸长量是 $2\sqrt{x^2-a^2}$ 减去失去的弧长 $2a\theta$，而不仅仅是两段笔直部分的长度。

- 由轴线而非释放点起量度下降的距离：质点下降的距离是 a，而不是 $2a$。
- 沿铅垂方向分解时，用了 $\sin\alpha$ 而不是 $\cos\alpha$；α 是由铅垂线起量度的，而 $\sin\alpha = a/x$。

STEP 之外

验算 d(弹性势能)/dx 等于回复力，其实是虚功原理（principle of virtual work）的一个例子：在保守系统（conservative system）中，任何方向上的力，等于势能沿该方向的变化率的负值。这种以一个坐标及其势能来描述系统的观点，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点，你会在大学力学课程的第一或第二年遇到它。若想看对能量、力和势的严谨论述，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。