详细解答

STEP I 2001，第 10 题

力学 • 抛体的飞行时间

STEP I 2001，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q10

关键思路

把选择分成两部分：仰角决定了飞行时间和水平射程，而方向只决定炮弹落在以炮为圆心的圆上的哪一点。因此，炮弹能击中直线，当且仅当其射程至少为 d。飞行时间随仰角增大而增加，但仰角超过 $45°$ 后，射程会缩短，所以我们把仰角一直调高，直到射程刚好降至 d 为止。

解答

给定仰角时的飞行时间与射程

把炮弹当作只受重力作用的质点（particle）（不计空气阻力），由地面发射，并落在平原上。设发射的仰角（elevation）为 α，其中 $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$。它的垂直速度分量是 $v\sin\alpha$，水平分量是 $v\cos\alpha$。

在垂直方向，经过时间 t 后它的高度是 $vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$，而高度再次为零的时刻是

$$T = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

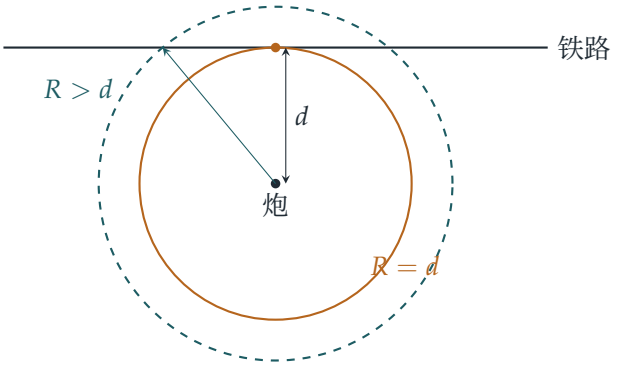
在这段时间内，它走过的水平距离是

$$R = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

炮弹何时能击中直线？

仰角固定时，转动炮身会使落点沿着一个以炮为圆心、半径为 R 的圆移动。直线上最近的一点与炮的距离为 d，而直线上其他各点都更远。所以这个圆与直线相交，当且仅当

$R \geq d$。当 $R = d$ 时，圆刚好与直线相切，炮必须正对着最近的那一点，即与直线垂直。



（俯视图。虚线圆对应较低的仰角，它在两点到达直线。实线圆对应最优的仰角，它刚好到达直线。）

所以炮手以仰角 α 发射时能击中直线，当且仅当

$$\sin 2\alpha \geq \frac{gd}{v^2}.$$

记 $k = gd/v^2$。题目告诉我们 $v^2 > gd$，所以 $0 < k < 1$，确实有一些仰角可行。（最大射程是 v^2/g，在 $45°$ 时取得，所以这个条件只是说直线在射程之内。）

使飞行时间最大

由于 $T = 2v\sin\alpha/g$，而 $\sin\alpha$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上是递增的，要使 T 最大，就要选取容许范围内最大的 α。

当 $0 < 2\alpha \leq \pi$ 时，条件 $\sin 2\alpha \geq k$ 成立，当且仅当

$$\arcsin k \leq 2\alpha \leq \pi - \arcsin k.$$

所以容许的最大仰角是 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin k$，它大于 $45°$。在这个仰角下 $\sin 2\alpha = k$，而由于 2α 位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 之内，$\cos 2\alpha$ 是负数：

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - k^2}.$$

? **想一想** 沿着直线瞄准远处某一点，让炮弹飞得更远，不是更好吗？

不是。飞得更远需要更大的射程，而在 $45°$ 以上，这意味着更低的仰角，飞行时间因而更短。飞行时间只取决于仰角，所以我们能做到的最好结果，就是仍能到达直线的最陡一击。它的射程刚好是 d，所以炮弹落在由炮到直线的垂足上。

现在把 T 平方，并利用 $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$：

$$\begin{aligned} g^2T^2 &= 4v^2\sin^2\alpha \\ &= 2v^2\left(1-\cos 2\alpha\right) \\ &= 2v^2 + 2v^2\sqrt{1-\frac{g^2d^2}{v^4}} \\ &= 2v^2 + 2\left(v^4 - g^2d^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

其中把 v^2 移入了平方根之内（因为 $v^2 > 0$，这是容许的）。这就是所要求的结果。

验算

- 当 $d \to 0$ 时，公式给出 $g^2T^2 \to 4v^2$，所以 $T \to 2v/g$。这相当于垂直向上发射，是最长的飞行时间；当直线紧贴着炮经过时，这正是应有的结果。
- 当 $v^2 = gd$ 时，直线仅仅在射程之内：唯一可行的是以 45° 发射，而公式给出 $g^2T^2 = 2v^2$，与 $T = 2v\sin 45^\circ/g = \sqrt{2}\,v/g$ 吻合。
- 以数值计算，取 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 100\,\mathrm{m}$ 和 $v = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，最佳仰角约为 71.1°，公式给出 $T \approx 7.72\,\mathrm{s}$。以数值方法逐步模拟运动，得到相同的时间，炮弹亦落在直线上。对所有仰角作穷举搜索，在数百个随机例子中都与公式一致。

常见错误

- 取了较小的根 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k$。这样发射同样能击中直线，但得到的是最短而不是最长的飞行时间：实际上就是取错了 $\cos 2\alpha$ 的正负号。
- 一开始就假设炮弹必定落在直线上最近的一点。这个结论最终是对的，但需要上面的论证：其他任何一点都需要更大的射程，因而需要更低的仰角。

STEP 之外

这是一个小型的约束最优化（constrained optimisation）问题：在某个约束条件（到达直线）之下，使某个量（飞行时间）最大，而最优解位于容许范围的边界上。在大学一年级的力学和最优化课程中，你会遇到处理这类问题的一般工具，例如拉格朗日乘数（Lagrange multipliers），以及与之相关的概念：所有轨迹的包络线（envelope）（即“安全抛物线”（parabola of safety）），它围住了炮所能到达的每一点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是深入学习抛体与质点力学的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。