详细解答

# STEP I 2001，第 1 题

纯数学 · 几何不等式

**STEP I 2001，第 1 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/01-s1-q1

## 关键思路

三点分别位于正方形的三条不同边上，其中必有两点落在一对对边上，而第三条边则连接这两条对边。为正方形设立坐标（coordinates），使每一点只有一个介乎 0 与 1 之间的自由参数（parameter）。然后用反证法（proof by contradiction）：假如三角形的三条边都比该上界长，每一个长度条件都会收紧其中一个参数的范围，而这些限制合起来，便会把其中一点推出正方形之外。

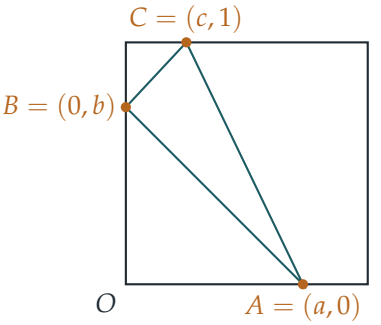
## 解答

以厘米为单位。正方形有四条边，而三点位于不同的边上，即这些点恰好不在正方形的其中一条边上，所以其中两点位于一对对边上，而第三点则位于与这两条边都相邻的一条边上。选取坐标轴，使正方形为 $0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$，并且

$$A = (a, 0) \text{ 在底边}, \qquad B = (0, b) \text{ 在左边}, \qquad C = (c, 1) \text{ 在顶边},$$

其中 $a, b, c \in [0, 1]$。（把正方形旋转或反射并不会改变任何长度，所以这样做不失一般性（without loss of generality）。）于是

$$AB^2 = a^2 + b^2, \qquad BC^2 = c^2 + (1 - b)^2, \qquad CA^2 = (c - a)^2 + 1.$$




设 $k = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 及 $t = 2 - \sqrt{3}$。以下两个小结果能让数字变得容易处理：

$$k^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad t^2 = 7 - 4\sqrt{3}, \qquad \text{所以} \qquad k^2 - 1 = t^2.$$

此外 $2t = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$，所以 $\sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$，因此

$$\sqrt{2t} + t = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

假设三角形的三条边都比 $k$ 长，以求得出矛盾。把正方形沿直线 $y = \frac{1}{2}$ 反射（这会把 $A$ 与 $C$ 的角色对调，亦把 $a$ 与 $c$ 对调），由这个对称性（symmetry），我们可以假设 $c \geq a$。

**由 $BC > k$ 出发**。由于 $c \leq 1$，

$$k^2 < BC^2 = c^2 + (1 - b)^2 \leq 1 + (1 - b)^2,$$

所以 $(1 - b)^2 > k^2 - 1 = t^2$。因为 $1 - b \geq 0$ 及 $t > 0$，由此得 $1 - b > t$，即 $0 \leq b < 1 - t$。

**由 $AB > k$ 出发**。由于 $0 \leq b < 1 - t$，我们有 $b^2 < (1 - t)^2$，所以

$$a^2 > k^2 - b^2 > k^2 - (1 - t)^2 = (1 + t^2) - (1 - 2t + t^2) = 2t.$$

因为 $a \geq 0$，由此得 $a > \sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$。

**想一想** 我们已经限定了 $a$ 的范围；第三条边 $CA$ 又会带来甚么？

边 $CA$ 由底至顶横越整个正方形，所以它在垂直方向的跨度为 1，其余的长度必须靠水平方向补足。

**由 $CA > k$ 出发**。我们有 $(c - a)^2 + 1 > k^2$，所以 $(c - a)^2 > t^2$，而由于 $c \geq a$，这表示 $c - a > t$。因此

$$c > a + t > \sqrt{2t} + t = 1.$$

但 $C$ 位于顶边上，所以 $c \leq 1$。这个矛盾说明三条边不可能全都比 $k$ 长：三角形 $ABC$ 至少有一条边的长度不超过 $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm，这正是所要证明的。

### 这个上界可以达到

当 $c = 1$ 及 $a = b = \sqrt{3} - 1$，即 $A = (\sqrt{3} - 1, 0)$、$B = (0, \sqrt{3} - 1)$、$C = (1, 1)$ 时，上面每一个不等式（inequality）都取到临界情况。这时

$$AB^2 = 2(\sqrt{3} - 1)^2 = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad BC^2 = CA^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3},$$

所以 $ABC$ 是等边三角形（equilateral triangle），边长恰好为 $k$（$C$ 位于角上，算作在顶边上）。因此 $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ 是最佳的常数。用三角学的说法，$k = \sec 15^\circ$：这是能放进单位正方形内的最大等边三角形，与各边倾斜成 $15^\circ$。

## 验算

- $k = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.0353$ 比正方形的边长稍大，这是合理的：若三角形的三个顶点分别在三条边上，它的三条边可以全都比 1 长，但只能长一点点。
- 在 $2 \times 10^6$ 组随机选取的 $(a, b, c) \in [0, 1]^3$ 中搜索，最短边从未超过 1.0337，低于 $k$；而上述等边三角形的例子，三条边在机器精度内均等于 1.03528。
- $\sec 15^\circ = 4/(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，与等边三角形的情况吻合。

## 常见错误

- 未经证明便假设三角形是等边的，或假设其中一个顶点在角上。极端情况能提示答案，却不能证明不等式对所有情况都成立。
- 忘记说明设置的理由：关键的结构性事实是，三条不同的边之中必定包含一对对边。
- 对 $(1 - b)^2 > t^2$ 或 $(c - a)^2 > t^2$ 开平方时，没有说明所取的是哪一个正负号。

## STEP 之外

这是一个小型的极大极小（max–min）问题：我们要在一个由各种情况组成的紧致集（compact set）上，使最短边尽量长，而极端情况会令所有约束条件同时取等号，这种模式在最优化（optimisation）和博弈论（game theory）中随处可见。由于 $[0, 1]^3$ 是有界闭集，而最短边是一个连续函数（continuous function），最大值必定存在，这个事实会在大学第一门分析课程中证明（极值定理（extreme value theorem））。Abbott 的 *Understanding Analysis*（大学分析入门教材）对此有很好的讲解，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 难题选讲）则有更多同类风格的 STEP 几何题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。