详细解答

STEP III 2000，第 9 题

力学 · 弹性斜碰撞

STEP III 2000，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

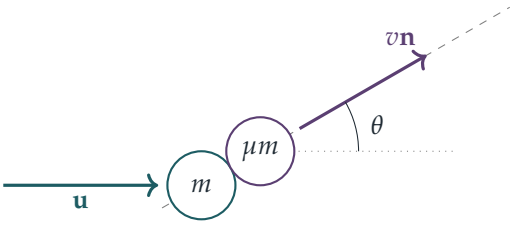
step.maths.org/questions/00-s3-q9

关键思路

两个圆盘都是光滑的，所以碰撞期间它们之间唯一的力沿连心线（line of centres）作用。原本静止的圆盘因此会沿这条线离开，所以 $\mathbf{n}$ 就是连心线的方向。把它的速度写成 $v\mathbf{n}$，用动量守恒（conservation of momentum，这是一条向量方程）求出另一个圆盘的速度，再让动能守恒（conservation of kinetic energy）定出 v。第 (ii) 部分只是多用一条能量方程，而不等式则来自余弦值不能超过 1 这个要求。

解答

我们把两个圆盘当作光滑水平面上的光滑质点（particle），所以圆盘之间以及圆盘与平面之间都没有摩擦力。设 θ 为 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{n}$ 之间的夹角，并记 $u = |\mathbf{u}|$，于是 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u\cos\theta$。



在碰撞的一刻，连心线（虚线）指向 $\mathbf{n}$ 的方向，与 $\mathbf{u}$ 的方向（点线）成 θ 角。这幅图只是示意图，代数运算并不需要用到它。

第 (i) 部分

质量为 μm 的圆盘原本静止，碰撞期间它所受的唯一水平力，是另一个圆盘施加的接触力，而这个力沿连心线作用。由于它沿 $\mathbf{n}$ 的方向离开，它碰撞后的速度是 $v\mathbf{n}$，其中 $v > 0$ 是某个速率。

设质量为 m 的圆盘碰撞后的速度为 $\mathbf{w}$。由动量守恒得

$$m\mathbf{u} = m\mathbf{w} + \mu m v\,\mathbf{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mu v\,\mathbf{n}.$$

这次碰撞是完全弹性（perfectly elastic）的，所以动能守恒：

$$\tfrac{1}{2}m\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}m\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mu m v^2.$$

利用 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$，

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n})\cdot(\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n}) = u^2 - 2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2.$$

代入并消去 $\frac{1}{2}m$ 和 u^2，

$$0 = -2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2 + \mu v^2 = \mu v((1+\mu)v - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}).$$

现在 $\mu > 0$，而且 $v \neq 0$，因为被撞的圆盘确实动了。所以我们可以除以 μv，得到

$$v = \frac{2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{1+\mu},$$

这就是所求的速率。顺带一提，$v > 0$ 告诉我们 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} > 0$，所以 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$。

? **想一想** 为甚么这里不需要用牛顿实验定律（Newton's experimental law）?

其实也可以用：取 $e = 1$，相对速度沿 $\mathbf{n}$ 的分量会反转，而垂直于 $\mathbf{n}$ 的分量则因为圆盘光滑而保持不变。但“完全弹性”的意思就是动能守恒，而这一条纯量方程（scalar equation）连同动量守恒，已经足以确定 v。上面的做法与之完全等价，而且不必分解成分量。

第 (ii) 部分

碰撞后的总动能等于最初的 $\frac{1}{2}mu^2$。如果两个圆盘平分这些动能，每个就有 $\frac{1}{4}mu^2$，所以对被撞的圆盘而言

$$\tfrac{1}{2}\mu m v^2 = \tfrac{1}{4}mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu v^2 = \tfrac{1}{2}u^2.$$

利用第 (i) 部分的结果和 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u\cos\theta$，我们有 $v = \dfrac{2u\cos\theta}{1+\mu}$，所以

$$\frac{4\mu u^2\cos^2\theta}{(1+\mu)^2} = \frac{u^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\theta = \frac{(1+\mu)^2}{8\mu}.$$

由于 $\cos\theta > 0$（见第 (i) 部分末段），我们取正根：

$$\cos\theta = \frac{1+\mu}{2\sqrt{2\mu}}.$$

要这样的角存在，我们需要 $\cos\theta \le 1$，即 $\cos^2\theta \le 1$：

$$\frac{(1+\mu)^2}{8\mu} \le 1 \iff (1+\mu)^2 \le 8\mu \qquad \text{（两边乘以}8\mu > 0\text{）}$$
$$\iff \mu^2 - 6\mu + 1 \le 0.$$

二次式 $\mu^2 - 6\mu + 1$ 的根是 $\mu = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$，而它恰好在两根之间（包括两根）为负数或零。因此

$$3 - \sqrt{8} \le \mu \le 3 + \sqrt{8},$$

这正是所要证明的结果。（下界是正数，$3 - \sqrt{8} \approx 0.172$，所以与 $\mu > 0$ 并无矛盾。）反过来说，对这个范围内的每一个 μ，公式都给出一个在 $(0, 1]$ 内的有效余弦值，所以平分动能确实可以做到；在范围的两端 $\theta = 0$，即正面碰撞（head-on collision）。

验算

- 正面碰撞的情况：如果 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{u}$ 平行，第 (i) 部分给出 $v = 2u/(1+\mu)$，这是大家熟悉的一维弹性碰撞结果。当 $\mu = 1$ 时就是 $v = u$：运动中的圆盘停下来，把全部运动传给对方，就像桌球中的情形一样。
- 质量相等，$\mu = 1$：第 (ii) 部分给出 $\cos\theta = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$，所以 $\theta = 45°$。这符合一个经典事实：两个质量相等的光滑圆盘作弹性碰撞后，会沿互相垂直的方向离开；动能相等又迫使两者速率相等，所以它们各与 $\mathbf{u}$ 成 $45°$ 角。
- 数值方面，我们模拟了 10 000 次随机的光滑弹性碰撞（冲量沿 $\mathbf{n}$ 方向），确认了动量守恒、能量守恒和第 (i) 部分的速率，并确认了当 μ 介乎 0.172 与 5.83 之间时，在第 (ii) 部分求得的角度下两者动能相等。举例来说，$\mu = 0.1$ 给出 $\cos^2\theta = 1.51 > 1$，这是不可能的。

常见错误

- 把 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{n}$ 当作平行。这是斜碰（oblique collision）；只有沿连心线的分量 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ 会传递过去。
- 除以 v 却没有说明它为何不等于零（$v = 0$ 是能量方程中“没有发生碰撞”的那个解）。
- 忘记排除 $\cos\theta$ 的负平方根。

STEP 之外

把被撞质点的速度写成沿冲量（impulse）方向，然后运用动量和能量，这个技巧正是物理学中弹性散射（elastic scattering）的核心。在质心参考系（centre-of-mass frame）中，情况最为简洁：弹性碰撞只是把两个速度旋转，而不改变它们的大小；第 (ii) 部分的角度范围，于是变成一个关于实验室参考系（lab frame）中哪些角度可以达到的命题。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）把两个参考系中的碰撞都讲解得非常清楚。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。