详细解答

STEP III 2000，第 8 题

纯数学 · 递推关系

STEP III 2000，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s3-q8

关键思路

定义数列的规则是非线性的，而且涉及除法，直接处理并不方便。窍门是把它改写成乘积的形式：$a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 1$。这是说，连续三项的某个组合恒等于 1。把同一事实往后推一步再写一次，然后将两个式子相减，非线性的规则便化为线性的规则。递推关系（recurrence）一旦变成线性，求通项公式（closed form）就只需用上二阶递推关系的标准方法：先求辅助二次方程（auxiliary quadratic）的根，再配合两个初始值。

解答

预备工作：数列有明确定义

每一步都要除以 a_{n-2}，所以我们应先确定没有任何一项是零。事实上每一项都是正数。我们有 $a_0 = a_1 = 1 > 0$。若 a_{n-1} 和 a_{n-2} 均为正数，则 $1 + a_{n-1}^2 > 0$ 且 $a_{n-2} > 0$，所以 $a_n > 0$。根据归纳法（induction），对所有 n 均有 $a_n > 0$。最初几项是

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1+1}{1} = 2, \quad a_3 = \frac{1+4}{1} = 5, \quad a_4 = \frac{1+25}{2} = 13.$$

线性递推关系

把定义式乘以 a_{n-2}，可得对每个 $n \geq 2$，

$$a_n a_{n-2} = 1 + a_{n-1}^2. \tag{$*$}$$

设 $P(k)$ 为命题 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$。我们对 k 用归纳法，证明 $P(k)$ 对所有 $k \geq 2$ 成立。

基础步骤。$a_2 = 2$，而 $3a_1 - a_0 = 3 - 1 = 2$，所以 $P(2)$ 成立。

归纳步骤。假设 $P(k)$ 对某个 $k \geq 2$ 成立，即

$$a_k + a_{k-2} = 3a_{k-1}.$$

我们需要证明 $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$。根据定义，$a_{k+1} = (1 + a_k^2)/a_{k-1}$。做法是利用 $n = k$ 时的 $(*)$，把分子中那个碍事的 1 换掉；该式说明 $1 = a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$：

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2 + a_k^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k\,(a_k + a_{k-2}) - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k \cdot 3a_{k-1} - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} && \text{根据} P(k) \\ &= 3a_k - a_{k-1} && \text{因为} a_{k-1} > 0. \end{aligned}$$

所以 $P(k+1)$ 成立。根据归纳法，对所有 $n \geq 2$ 均有 $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$。

> **想一想** 归纳假设（inductive hypothesis）在哪里用上了？为甚么可以放心使用 $n = k$ 时的 $(*)$？

归纳假设只用了一次，就是把 $a_k + a_{k-2}$ 换成 $3a_{k-1}$。这个括号之所以出现，全因我们把 1 换成了 $a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$。使用 $(*)$ 则完全不需要任何假设：它不过是把 a_k 的定义乘开，对每个 $k \geq 2$ 都成立。换句话说，$a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ 这个量在每一步都相同，正是它把线性关系一步一步传递下去。

通项公式

记 $\beta = \alpha^{-1}$。由于 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

$$\beta = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \alpha + \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = 1.$$

因此

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 - 2 = 3, \qquad \alpha^2\beta^2 = 1,$$

所以 α^2 和 β^2 就是我们这个递推关系的辅助方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根。（具体来说，它们是 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。）

现在对 $n \geq 1$ 定义

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

我们只要验证 b_n 与 a_n 的首两项相同，并且满足同一个递推关系，便可证明 $b_n = a_n$。

它满足递推关系。若 x 是 $x^2 = 3x - 1$ 的根，则乘以 x^{n-2} 可得 $x^n = 3x^{n-1} - x^{n-2}$。由于 $\alpha^{2n-1} = \beta\,(\alpha^2)^n$（这里用了 $\alpha\beta = 1$），取 $x = \alpha^2$ 并乘以 β，得

$$\alpha^{2n-1} = 3\alpha^{2n-3} - \alpha^{2n-5}.$$

同样地，取 $x = \beta^2$ 并乘以 α，可得 $\beta^{2n-1} = 3\beta^{2n-3} - \beta^{2n-5}$。两式相加再除以 $\sqrt{5}$：

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

初始值相符。

$$b_1 = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1,$$
$$b_2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 = a_2.$$

结论。(a_n) 和 (b_n) 都对 $n \geq 3$ 满足 $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$，而且在 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时相等。这类递推关系由前两项决定每一项，所以根据（强）归纳法（strong induction），对每个 $n \geq 1$ 均有 $a_n = b_n$。也就是说，

$$a_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \alpha^{-(2n-1)}}{\sqrt{5}} \qquad (n \geq 1),$$

这正是所要证明的。

> ? **想一想** 为甚么从 $n = 1$ 而不是 $n = 0$ 开始比较?

a_n 的线性递推关系在 $n = 3$ 时涉及 a_2 和 a_1，所以要处理 $n \geq 1$ 的情况，只需核对 b_1 和 b_2 便已足够。其实公式在 $n = 0$ 时同样成立：$b_0 = (\alpha^{-1} + \alpha)/\sqrt{5} = 1 = a_0$。所以无论从哪里开始，都没有损失。

验算

- 各项为 $1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \ldots$，即斐波那契数（Fibonacci numbers）$F_1, F_3, F_5, \ldots$（其中 $a_0 = 1 = F_{-1}$）。每一项都等于前一项的三倍减去再前一项：$3 \cdot 13 - 5 = 34$。
- 直接验证 $(*)$：$34 \cdot 5 - 13^2 = 170 - 169 = 1$。
- 数值上，$a_{10} = 4181$，而 $(\alpha^{19} + \alpha^{-19})/\sqrt{5} \approx 4181.000$。$\alpha^{-19}/\sqrt{5}$ 这一项极小，所以 a_n 就是最接近 $\alpha^{2n-1}/\sqrt{5}$ 的整数。
- 按原来的规则精确计算数列直至 $n = 39$，所得各项都是整数，每次都满足线性递推关系，并与通项公式吻合。

常见错误

- 试图把 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$ 代入 $(1 + a_k^2)/a_{k-1}$ 再展开，以证明 $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$。这样只会弄得一团糟。那个 1 必须用前一步的定义来替换。
- 忘记定义中要除以 a_{n-2}。完整的答案应指出各项均为正数，因此这个除法以及最后约去 a_{k-1} 的一步都是合理的。
- 只验证 b_n 满足递推关系，却没有核对两个初始值。二阶递推关系需要两个初始值才能确定。

STEP 之外

常数 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ 是斐波那契数的卡西尼恒等式（Cassini's identity）$F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ 的一个例子。这里只出现奇数下标，所以符号永远是 $+1$。更一般地，对任何二阶线性递推关系，$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$ 每一步都乘以一个固定的因子（它是一个 2×2 行列式（determinant），而行列式具有可乘性）。像本题这样的有理递推关系，竟然出人意料地总是产生整数，这与“Somos 数列”（Somos sequences）和洛朗现象（Laurent phenomenon）的研究有关。至于斐波那契型数列和连分数（continued fractions）的数论（留意 α 就是黄金比（golden ratio）），Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是一本十分值得细读的好书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。