详细解答

STEP III 2000，第 7 题

纯数学 · 不等式与极限

STEP III 2000，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s3-q7

关键思路

两个不等式都是把一个乘积与我们已经熟悉的东西作比较而得出的。用二项式定理（binomial theorem）展开 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，所得各项与 $\frac{1}{r!}$ 十分相似，只是略小一点。至于乘积 $\mathrm{P}(n)$，算术平均–几何平均不等式（AM–GM inequality）可以把 n 个因子的乘积化为它们平均值的 n 次方。这些因子是 $1+\frac{1}{2^k}$，它们的平均值刚好略小于 $1+\frac{1}{n}$，于是便直接连回第一部分。

解答

上界 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$

由二项式定理，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

第二个分数是 r 个因子的乘积，

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right),$$

由于 $0 \le j \le r-1 \le n-1$，每个因子都在 $(0,1]$ 之内。因此这个乘积不超过 1，而展开式中每一项都不超过 $\frac{1}{r!}$。所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!} = \mathrm{e},$$

其中最后一个不等式是严格的，因为被略去的各项 $\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{(n+2)!}, \ldots$ 全部为正数。这对每一个正整数 n 都成立。

上界 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$

把乘积写成 $\mathrm{P}(n) = a_1 a_2 \cdots a_n$，其中 $a_k = \dfrac{2^k+1}{2^k} = 1 + \dfrac{1}{2^k}$，它们全部为正数，所以 AM–GM 不等式适用。算术平均（arithmetic mean）是

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{n},$$

这里用了等比级数（geometric series）求和 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$。由于 $1 - 2^{-n} < 1$，这个平均值严格小于 $1 + \frac{1}{n}$。于是 AM–GM 不等式给出

$$\mathrm{P}(n)^{1/n} \le 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

两边都是正数，所以取 n 次方后不等式仍然成立：

$$\mathrm{P}(n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e},$$

其中第二个不等式用了第一部分的结果。这对每一个正整数 n 都成立。

> ? **想一想** 严格不等式是从哪里来的？AM–GM 不等式只给出 $\le$。

严格性来自 $1 - 2^{-n} < 1$，而不是来自 AM–GM 不等式。事实上，当 $n \ge 2$ 时，各因子 a_k 互不相同，所以 AM–GM 不等式本身也是严格的。但当 $n = 1$ 时只有一个因子，AM–GM 不等式成为等式（$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$）。而 $1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ 这一步在任何情况下都是严格的，所以这个论证涵盖所有 n。

极限

每个因子 $a_{n+1} = 1 + 2^{-(n+1)}$ 都大于 1，所以 $\mathrm{P}(n+1) = a_{n+1}\mathrm{P}(n) > \mathrm{P}(n)$。因此数列 $\mathrm{P}(n)$ 严格递增（strictly increasing），并且有上界（bounded above）e。有上界的递增数列必定收敛（converge），所以 $\mathrm{P}(n)$ 趋向某个极限（limit）L。

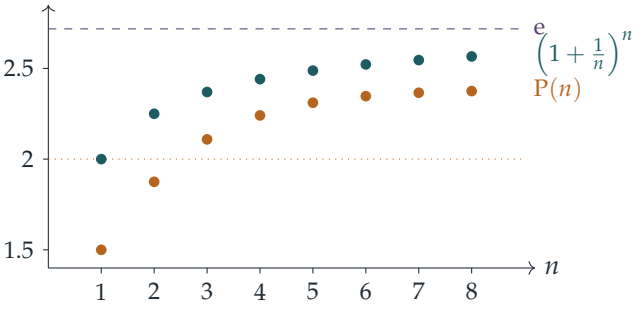
先看上界：每一个 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$，所以极限满足 $L \le \mathrm{e}$。（取极限只能保留非严格不等式，这就是为甚么我们得到的是 $\le$ 而不是 $<$。）

再看下界，先计算几项：

$$\mathrm{P}(1) = \frac{3}{2}, \qquad \mathrm{P}(2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}, \qquad \mathrm{P}(3) = \frac{15}{8}\cdot\frac{9}{8} = \frac{135}{64} > \frac{128}{64} = 2.$$

由于数列递增，$L \ge \mathrm{P}(4) > \mathrm{P}(3) > 2$。综合起来，

$$2 < L \le \mathrm{e}.$$



验算

- $n=1$：$(1+1)^1=2<\mathrm{e}$，而 $\mathrm{P}(1)=1.5<2$。当 $n=4$：$\mathrm{P}(4)=\frac{2295}{1024}\approx 2.241<\left(\frac{5}{4}\right)^4\approx 2.441$。
- 以数值方法计算这个乘积，$\mathrm{P}(n)$ 稳定在 $L\approx 2.3842$（到 $n=60$ 时，它在小数点后很多个位都已不再变动），这个数值稳妥地落在 2 与 $\mathrm{e}\approx 2.7183$ 之间。

常见错误

- 仅仅因为每个 $\mathrm{P}(n)<\mathrm{e}$ 就声称 $L<\mathrm{e}$。严格不等式在取极限后可能变成等式；能够推出的只有 $L\leq \mathrm{e}$。（这里 $L<\mathrm{e}$ 其实是对的，但需要另作论证。）
- 证明了 $\mathrm{P}(n)>2$ 对某个 n 成立，却忘记说明数列是递增的，而正是这一点才把这个界传给 L。
- 使用 AM–GM 不等式时没有检查各 a_k 是否为正数。

STEP 之外

“递增且有上界，所以收敛”这一步就是单调收敛定理（monotone convergence theorem），它与实数的完备性（completeness）等价。从基本原理出发证明这个定理，是大学分析课程最先做的事情之一。取对数后，$\mathrm{P}(n)$ 变成级数 $\sum \ln\left(1+2^{-k}\right)$，把它与 $\sum 2^{-k}$ 比较便可知它收敛。这是研究无穷乘积（infinite product）的标准方法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门书）把这两个想法都讲得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。