详细解答

STEP III 2000，第 6 题

纯数学 · 四次多项式的因式分解

> **STEP III 2000，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q6

关键思路

比较系数（comparing coefficients）可把这个因式分解（factorisation）化为三条把 p,q,r 与 a,b,c 联系起来的方程。要得到只含 a 的方程，就必须消去 b 和 c，而恒等式（identity）$4bc=(b+c)^2-(b-c)^2$ 正好做到这一点，因为 $b+c$ 和 $b-c$ 正是自然出现的组合。至于最后的四次式（quartic），须先消去 y^3 项，才能用上那条三次方程（cubic），而平移 $y=x+k$ 便可做到。

解答

求 p、q 和 r

展开右边，得

$$(x^2-ax+b)(x^2+ax+c)=x^4+(b+c-a^2)x^2+a(b-c)x+bc,$$

其中 x^3 项 ax^3-ax^3 互相抵消。比较系数，得

$$p=b+c-a^2,\qquad q=a(b-c),\qquad r=bc.$$

a^2 所满足的三次方程

设 $u=a^2$。由第一条方程，$b+c=p+u$。

若 $a\neq 0$，第二条方程给出 $b-c=q/a$，所以 $(b-c)^2=q^2/u$。于是

$$4bc=(b+c)^2-(b-c)^2 \quad\Longrightarrow\quad 4r=(p+u)^2-\frac{q^2}{u}.$$

两边乘以 $u \neq 0$，

$$4ru = u(u^2 + 2pu + p^2) - q^2 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

所以 $u = a^2$ 是一个根（root）。

若 $a = 0$，则 $q = a(b - c) = 0$，而 $u = a^2 = 0$ 也是一个根，因为这时三次式的每一项在 $u = 0$ 时都等于零。因此在任何情况下 a^2 都是一个根，正如题目所求。

> ? **想一想** 为甚么不论 p、q 和 r 是甚么，都必定有一个 $u \geq 0$ 的根?

把这个三次式记为 $f(u)$。在 $u = 0$ 处有 $f(0) = -q^2 \leq 0$，而由于首项是 u^3，当 $u \to +\infty$ 时 $f(u) \to +\infty$。若 $q = 0$，则 $u = 0$ 本身就是一个根。否则 $f(0) < 0$，而对某个足够大的 U 有 $f(U) > 0$；由于 f 是连续（continuous）的，根据介值定理（intermediate value theorem），在 0 与 U 之间（不含两端）必有一个根。无论哪种情况，都有一个非负根。

这一点很重要，因为我们需要 $a = \sqrt{u}$ 是实数。非负根必定给出实数 a，所以每个不含 x^3 项的实系数四次式，都可以分解为两个符合题目形式的实系数二次式（quadratic）。（若 $u > 0$，我们可以由 $b + c = p + u$ 和 $b - c = q/\sqrt{u}$ 求回 b 和 c。）

$p = -1$、$q = -6$、$r = 15$ 的情况

这里 $p^2 - 4r = 1 - 60 = -59$，所以三次方程是

$$u^3 - 2u^2 - 59u - 36 = 0.$$

在 $u = 9$ 处：$729 - 162 - 531 - 36 = 0$，所以 $u = 9$ 是一个根。（除去这个因式后得 $(u - 9)(u^2 + 7u + 4)$，其中二次因式有两个负根，所以 $u = 9$ 是唯一的非负根。）

分解四次式

题目给出的四次式含有 y^3 项，所以我们先作平移把它消去。各根之和为 8，故其平均值为 2，于是设 $y = x + 2$。逐项展开：

$$\begin{aligned}
(x+2)^4 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16, \\
-8(x+2)^3 &= -8x^3 - 48x^2 - 96x - 64, \\
23(x+2)^2 &= 23x^2 + 92x + 92, \\
-34(x+2) &= -34x - 68,
\end{aligned}$$

把以上各式与 39 相加，得

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = x^4 - x^2 - 6x + 15.$$

这正是 $p = -1$、$q = -6$、$r = 15$ 的情况，这就是题目先考虑该情况的原因。

取 $u = a^2 = 9$，$a = 3$。则

$$b + c = p + a^2 = 8, \qquad b - c = \frac{q}{a} = -2,$$

所以 $b = 3$，$c = 5$。验算一下：$bc = 15 = r$。因此

$$x^4 - x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 5).$$

最后代入 $x = y - 2$：

$$x^2 - 3x + 3 = (y^2 - 4y + 4) - (3y - 6) + 3 = y^2 - 7y + 13,$$
$$x^2 + 3x + 5 = (y^2 - 4y + 4) + (3y - 6) + 5 = y^2 - y + 3.$$

所以

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = (y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3).$$

若改取 $a = -3$，则 b 和 c 互换，得出同样的两个因式，只是次序相反。

验算

- 展开答案：$(y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3) = y^4 - 8y^3 + (3 + 7 + 13)y^2 - (21 + 13)y + 39$，与原式相符。
- 代入 $y = 1$：四次式的值是 $1 - 8 + 23 - 34 + 39 = 21$，而两个因式给出 $7 \times 3 = 21$。
- 两个二次因式的判别式（discriminant）都是负数（分别为 -3 和 -11），所以两者在实数范围内都不能再分解，而这个四次式没有实根。这与 $y = 1$ 时取正值相符。

我们也随机选取了 2000 组有理数 a, b, c 来检验 p, q, r 的公式和那条三次方程，并对 2000 组随机的 (p, q, r) 用二分法（bisection）找到了非负根。

常见错误

- 除以 a 得出 $b - c = q/a$，却没有处理 $a = 0$ 的情况。
- 以“三次方程必有实根”作为论据：这句话虽然正确，却没有证明该根是非负的。关键在于 $f(0) = -q^2$ 的正负号。
- 最后忘记由 x 代回 y。

STEP 之外

这基本上就是笛卡儿（Descartes）（以及费拉里（Ferrari））解一般四次方程的方法：先用平移消去三次项，再通过解一条辅助的三次方程，把四次式分解为两个二次式；这条

辅助方程称为*预解三次方程*（resolvent cubic）。配合卡尔达诺（Cardano）的三次方程公式，这个方法说明了每一条四次方程都可以用根式求解（solvable by radicals）。为甚么这种做法到四次为止，一般的五次方程（quintic）再没有这样的公式，正是伽罗瓦理论（Galois theory）所研究的课题。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。