详细解答

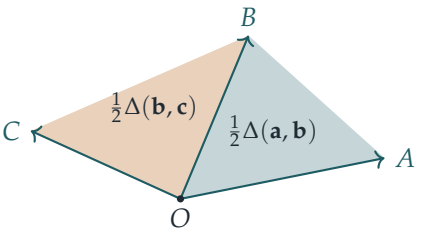
STEP III 2000，第 5 题

纯数学 · 线性变换

> **STEP III 2000，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q5

关键思路

$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为列的矩阵（matrix）的行列式（determinant），所以它是三角形 OAB 有向面积（signed area）的两倍，而且恰好在 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行时才不为零。线性映射（linear map）会把所有这类面积乘以同一个因子，即它的行列式。单凭这一点，必要性便立刻得出。至于充分性，(ii) 中的恒等式（identity）只用各个 Δ 就把 $\mathbf{c}$ 以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示出来，所以一旦 $\mathbf{M}$ 由 A 和 B 确定下来，C 被送到哪里便再无选择余地。



解答

以下一律以 $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$ 表示以 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 为列的 2×2 矩阵。于是

$$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}].$$

对于非零的 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$，$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ 恰好在 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 平行时成立：行列式为零，当且仅当其中一列是另一列的倍数。因此 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$、$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})$、$\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})$、$\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 这六个数全部不为零。

还有两个事实会反复用到。由于 $\mathbf{M}[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] = [\mathbf{Mu}\ \ \mathbf{Mv}]$（逐列计算），而且乘积的行列式等

于行列式的乘积，

$$\Delta(\mathbf{Mu}, \mathbf{Mv}) = \det \mathbf{M}\, \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{$*$}$$

另外，$\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$。

第 (i) 部分

我们需要 $\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$ 和 $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$，两者合起来就是

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}].$$

由于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行，$\det[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$，所以 $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$ 可逆（invertible），而

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

正符合要求。事实上，这个 $\mathbf{M}$ 是唯一符合要求的矩阵，因为我们可以在右边乘以逆矩阵。取行列式，得 $\det \mathbf{M} = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})/\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，此数不为零。

第 (ii) 部分：恒等式

取左方的第一个分量：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2 - a_2b_1)c_1 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_1 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 \\ &\quad = a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 + a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 = 0,\end{aligned}$$

因为六项两两相消。第二个分量的计算完全相同，只是把各个 Δ 以外的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的下标全部由 1 改为 2：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2 - a_2b_1)c_2 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_2 \\ &\quad = a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{c} + \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})\,\mathbf{b} + \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

这正是所要证明的。这个恒等式对任意三个向量（vector）都成立，所以对 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ 同样成立：

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\mathbf{r} + \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})\,\mathbf{q} + \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r})\,\mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

> ? **想一想** 这个比例条件写成等式，确切是在说甚么？

所有 Δ 都不为零，所以条件 $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c}) : \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r}) : \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ 的意思是：存在同一个数 $k \neq 0$，使得

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = k\,\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = k\,\Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \qquad \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = k\,\Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a}). \tag{3}$$

用文字来说：三角形 OPQ、OQR、ORP 的三个有向面积，就是 OAB、OBC、OCA 的面积全部按同一个因子缩放的结果。

第 (ii) 部分：必要性

假设 $\mathbf{Ma}=\mathbf{p}$、$\mathbf{Mb}=\mathbf{q}$ 及 $\mathbf{Mc}=\mathbf{r}$。由 $(*)$，

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})=\det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}),\quad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})=\det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}),\quad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})=\det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}).$$

这就是 $k=\det\mathbf{M}$ 时的 (3)，而且因为 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\neq 0$，所以 $k\neq 0$。因此两组比相等。

第 (ii) 部分：充分性

现在假设 (3) 对某个 $k\neq 0$ 成立。由第 (i) 部分，存在矩阵 $\mathbf{M}$ 使得 $\mathbf{Ma}=\mathbf{p}$ 及 $\mathbf{Mb}=\mathbf{q}$；我们必须证明这同一个 $\mathbf{M}$ 也把 $\mathbf{c}$ 送到 $\mathbf{r}$。

把 $\mathbf{M}$ 作用于 (1)。矩阵乘法是线性的，而各个 Δ 只是数，所以

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{Mc}=-\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})\,\mathbf{q}-\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{p}.$$

两边乘以 k，并对每一项使用 (3)：

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc}=-\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})\,\mathbf{q}-\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})\,\mathbf{p}.$$

由 (2)，右方等于 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r}$。所以

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc}=\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r},$$

又因为 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\neq 0$（$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ 不平行），故 $\mathbf{Mc}=\mathbf{r}$。因此 P、Q、R 就是 A、B、C 在 $\mathbf{M}$ 之下的像（image）。

必要性与充分性合起来，便证明了这个比例条件是充分必要条件（necessary and sufficient）。

验算

- 试取 $\mathbf{a}=\binom{1}{0}$、$\mathbf{b}=\binom{0}{1}$、$\mathbf{c}=\binom{1}{1}$。这时 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})=1$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})=-1$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})=-1$，而 (1) 就是 $\binom{1}{1}-\binom{0}{1}-\binom{1}{0}=\mathbf{0}$。取 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$，得 $\mathbf{p}=\binom{2}{0}$、$\mathbf{q}=\binom{1}{3}$、$\mathbf{r}=\binom{3}{3}$，三个 Δ 分别是 6、-6、-6：比例仍然是 $1:-1:-1$，其中 $k=6=\det\mathbf{M}$。
- 在数值方面，我们用精确分数运算，以 20,000 组随机整数向量三元组检验了这个恒等式。在其中约 17,700 组没有任何两个向量平行的三元组中，我们按第 (i) 部分构造 $\mathbf{M}$，确认了必要性，并确认 $\mathbf{Mc}=\mathbf{r}$ 恰好在 (3) 成立时才成立。

常见错误

- 把比例条件写成一条分数等式，却没有说明各个 Δ 不为零。题目假设任何两个向量都不平行，正是为了保证每一次除法都合法。
- 只证明必要性。真正的内容在于充分性：矩阵由它对两个线性独立（independent）向量的作用所确定，所以这个条件必须能迫使第三个像符合要求。
- 因 Δ 内的次序而弄错正负号：循环次序 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 然后 $\mathbf{c}, \mathbf{a}$ 是有关系的，因为 $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})$。

STEP 之外

恒等式 (1) 其实是克莱姆法则（Cramer's rule）的另一种面貌：它以行列式之比给出 $\mathbf{c}$ 在基（basis）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 之下的坐标。事实 $(*)$，即线性映射把每个有向面积都按 $\det \mathbf{M}$ 缩放，正是行列式的几何定义，而二重积分（double integral）换元时出现的雅可比（Jacobian）因子，背后也是这个道理。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）对这两个想法都有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。