详细解答

STEP III 2000，第 4 题

纯数学 · 有理函数的描绘

STEP III 2000，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s3-q4

关键思路

令 $f(x) = x + c$ 并消去分母后，三次项互相抵消，余下的是一个关于 x 的二次方程（quadratic）。于是直线与曲线是否相交，就取决于一个判别式（discriminant）的正负；而这个判别式本身又是 c 的二次式，所以我们要求“判别式的判别式”。至于描绘图像，把 f 拆成线性部分加上部分分式（partial fractions），就能得知一切：各条渐近线（asymptote）、曲线位于渐近线的哪一侧，以及曲线在何处穿过斜渐近线（oblique asymptote）。

解答

直线与曲线在何处相交

当 $x \neq \pm 1$ 时，方程 $f(x) = x + c$ 等价于

$$x(x-2)(x-a) = (x+c)(x^2-1).$$

展开得 $x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = x^3 + cx^2 - x - c$。两边的 x^3 项互相抵消，余下

$$q(x) \equiv (a+2+c)x^2 - (2a+1)x - c = 0. \qquad (*)$$

因此，直线与曲线相交，当且仅当 $(*)$ 有一个不等于 $x = \pm 1$ 的实根（real root）。

? **想一想** $(*)$ 的根会不会恰好是被排除的值 $x = \pm 1$ 之一？

代入可得 $q(1) = (a+2+c) - (2a+1) - c = 1 - a$ 及 $q(-1) = (a+2+c) + (2a+1) - c = 3(a+1)$。两者都与 c 无关，所以只有当 $a = 1$ 时 $x = 1$ 才是根，只有当 $a = -1$ 时 $x = -1$ 才是根。当 $|a| \neq 1$ 时，$(*)$ 的每一个实根都对应一个真正的交点。

$a+2+c=0$ 的情况。这时 $(*)$ 是线性方程：$-(2a+1)x+(a+2)=0$。若 $|a|>1$，则 $2a+1\neq 0$，所以有根 $x=\frac{a+2}{2a+1}$。

$a+2+c\neq 0$ 的情况。这时 $(*)$ 是真正的二次方程，其判别式为

$$D(c)=(2a+1)^2+4c(a+2+c)=4c^2+4(a+2)c+(2a+1)^2.$$

把 D 看成 c 的二次式，其首项系数（leading coefficient）为正。它自身的判别式是

$$\begin{aligned}16(a+2)^2-16(2a+1)^2&=16[(a+2)-(2a+1)][(a+2)+(2a+1)]\\&=16(1-a)\cdot 3(1+a)=48(1-a^2).\end{aligned}$$

若 $|a|>1$，上式为负，所以对任何 c 都有 $D(c)>0$；于是 $(*)$ 有两个相异实根，而且都不等于 ± 1。连同线性的情况，可知对任何 c，直线 $y=x+c$ 都与曲线相交。

若 $|a|=1$，对任何 c 都有 $D(c)\geq 0$，所以 $(*)$ 仍然总有实根，这就是该命题在代数上的内容。不过这时曲线本身会退化：分子和分母约去一个公因式，曲线变成一条缺了一点的双曲线（hyperbola）。例如，取 $a=1$ 时，我们得到 $f(x)=x-3+\frac{3}{x+1}$ $(x\neq 1)$，而直线 $y=x-3$（即它的渐近线）与它并不相交；在 $(*)$ 中这对应 $c=-3$，此时唯一的根正是被排除的 $x=1$。所以当 $|a|=1$ 时，除了这些例外的 c 值之外，命题都成立；而当 $|a|>1$ 时，命题毫无例外地成立。

若 $|a|<1$，二次式 $D(c)$ 有两个实根，并且在两根之间严格为负。一个明确的选择是 $c=-\frac{1}{2}(a+2)$，即两根的中点：

$$D(-\tfrac{1}{2}(a+2))=(a+2)^2-2(a+2)^2+(2a+1)^2=3(a^2-1)<0.$$

对于这个 c，$a+2+c=\frac{1}{2}(a+2)\neq 0$（因为 $a>-1$），所以 $(*)$ 是一个判别式为负的真正二次方程，没有实根。因此直线 $y=x-\frac{1}{2}(a+2)$ 与曲线不相交，这正是所要证明的。

斜渐近线

以 x^2-1 除 $x^3-(a+2)x^2+2ax$，得

$$f(x)=x-(a+2)+\frac{(2a+1)x-(a+2)}{x^2-1}.$$

当 $x\to\pm\infty$ 时，该分式趋向 0，所以斜渐近线是

$$y=x-a-2.$$

为了描绘图像，把该分式拆成部分分式会很有帮助：

$$f(x)=x-(a+2)+\frac{a-1}{2(x-1)}+\frac{3(a+1)}{2(x+1)}.$$

由此我们得知一切：

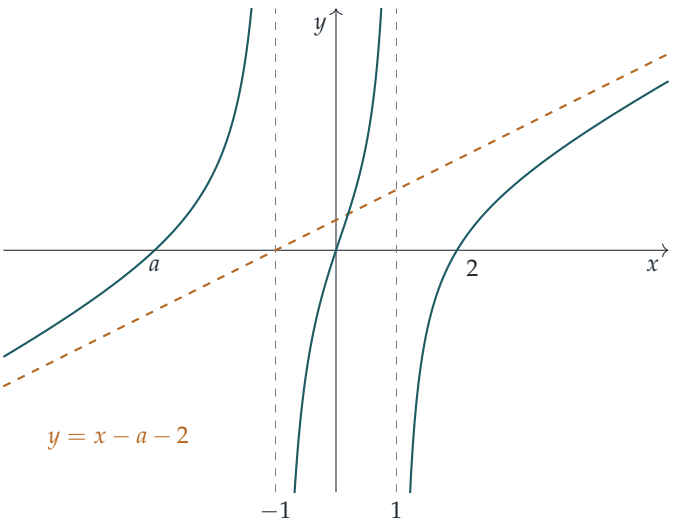
- 零点位于 $x = 0,\ 2,\ a$，铅垂渐近线（vertical asymptote）位于 $x = \pm 1$；
- 曲线只在 $(2a+1)x = a+2$ 之处与斜渐近线相交，即在 $x_0 = \frac{a+2}{2a+1}$（这又是 $(*)$ 的线性情况）；
- 当 $|x|$ 很大时，差距 $f(x) - (x-a-2)$ 的表现有如 $\frac{2a+1}{x}$。在两种情况中都有 $2a+1 < 0$，所以当 $x \to +\infty$ 时曲线位于渐近线下方，而当 $x \to -\infty$ 时则位于其上方；
- 系数 $\frac{a-1}{2}$ 和 $\frac{3(a+1)}{2}$ 决定了曲线在 $x = 1$ 和 $x = -1$ 两侧的表现。

情况 (i)： $a < -1$

两个系数都是负数：$\frac{a-1}{2} < 0$ 及 $\frac{3(a+1)}{2} < 0$。所以当 $x \to 1^-$ 或 $x \to -1^-$ 时 $f(x) \to +\infty$，而当 $x \to 1^+$ 或 $x \to -1^+$ 时 $f(x) \to -\infty$。此外

$$f'(x) = 1 - \frac{a-1}{2(x-1)^2} - \frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} > 0,$$

因为被减去的两项都是负数，所以 f 在它的三个分支上都是递增的，完全没有转向点（turning point）。交点满足 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} > 0$ 及 $x_0 - 1 = \frac{1-a}{2a+1} < 0$，所以 $-1 < x_0 < 1$：曲线在中间的分支上穿过它的渐近线。零点分别位于 $a < -1$（左分支）、0（中间分支）和 2（右分支）。



（图中取 $a = -3$，这时渐近线是 $y = x + 1$，而 $x_0 = \frac{1}{5}$。）

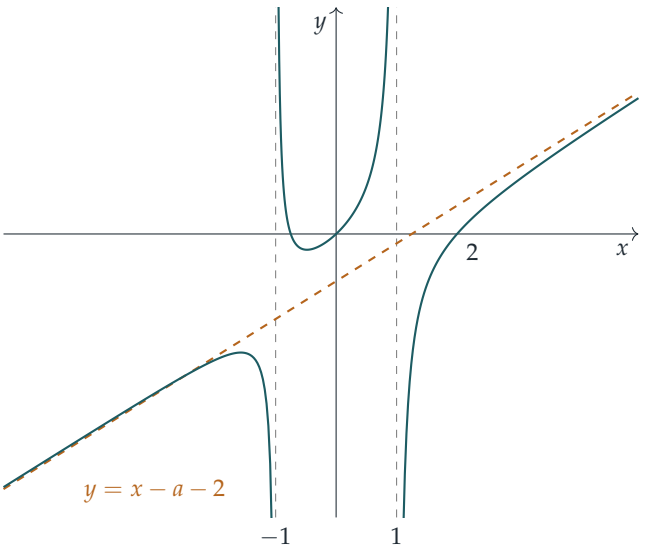
情况 (ii)： $-1 < a < -\frac{1}{2}$

现在 $\frac{a-1}{2} < 0$，但 $\frac{3(a+1)}{2} > 0$。在 $x = 1$ 附近，表现与之前一样（从左边趋向 $+\infty$，从右边趋向 $-\infty$），但在 $x = -1$ 附近则反转过来：当 $x \to -1^-$ 时 $f(x) \to -\infty$，而当 $x \to -1^+$

时 $f(x) \to +\infty$。现在 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} < 0$，所以 $x_0 < -1$：交点在左分支上。零点 a 和 0 都位于 $(-1, 0)$ 之内。

> **想一想** 虽然题目没有要求我们求出转向点，但它们必定在哪里？

在左分支上，曲线在渐近线上方从 $-\infty$ 升上来，在 x_0 处穿过渐近线，然后当 $x \to -1^-$ 时跌向 $-\infty$；所以它有一个极大点（maximum）。曲线在这个分支上没有零点（三个零点全都 > -1），所以整个分支都位于 x 轴下方。在中间分支上，$f \to +\infty$ 于两端成立，曲线在 a 与 0 之间降到轴的下方，在其他地方则为正，所以在 a 与 0 之间有一个极小点（minimum）。在右分支上，当 $x > 1$ 时 $\frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} < 1$，所以 $f'(x) > 0$：曲线从 $-\infty$ 上升，经过 $x = 2$，并从下方趋近渐近线。



（图中取 $a = -\frac{3}{4}$：渐近线为 $y = x - \frac{5}{4}$，交点在 $x_0 = -\frac{5}{2}$，而曲线在 $-\frac{3}{4}$ 与 0 之间略为降到轴的下方。）

验算

- 取 $a = 0$ 及 $c = -1$（即我们所选的 $c = -\frac{1}{2}(a+2)$），$(*)$ 变成 $x^2 - x + 1 = 0$，其判别式为 -3：没有交点，与预期相符。
- 取 $a = -3$：$f(-1.1) \approx 30.9$ 及 $f(-0.9) \approx -28.8$，与情况 (i) 中就 $x \to -1^{\mp}$ 所得的正负号吻合。取 $a = -\frac{3}{4}$，则 $f(-1.1) \approx -5.7$ 及 $f(-0.9) \approx 2.1$，正是情况 (ii) 中反转了的表现。
- 在每个范围内取若干个 a 值，以数值方法数算 f' 的变号次数，可以确认情况 (i) 中没

有转向点，而情况 (ii) 中左分支和中间分支各恰有一个转向点。

常见错误

- 忘记 $(*)$ 的根 $x = \pm 1$ 并不是交点；当 $|a| = 1$ 时出错的正是这一点。
- 忽略 $a + 2 + c = 0$ 的情况，这时 $(*)$ 是线性方程，判别式的论证并不适用。
- 在情况 (ii) 中弄错曲线在铅垂渐近线 $x = -1$ 两侧的走向：$a + 1$ 的正负号会改变那里的图像。

STEP 之外

当 $|a| < 1$ 时，$D(c)$ 的两个根给出与曲线相切的直线 $y = x + c$，即切线（tangent），而介乎两者之间的直线则与曲线不相交。当 a 越过 ± 1 时，这些切线会出现或消失，曲线的形状也随之改变：一个零点穿过一条铅垂渐近线，渐近线旁边的表现随即反转。研究一族曲线的定性形状如何随参数（parameter）而改变，正是分歧理论（bifurcation theory）的起点，在大学一年级的微分方程（differential equations）课程中就会遇到；可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）。若想多练习这类图像描绘，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）是极佳的选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。