详细解答

STEP III 2000，第 3 题

纯数学 · 复数与几何

> **STEP III 2000，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q3

本题在 *Beyond STEP* 第 5.6 节费马点中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/fermat-point.html

关键思路

在阿根图（Argand plane）上，把一个向量旋转 60° 只不过是乘以 $\alpha = e^{i\pi/3}$，所以在给定边上作等边三角形（equilateral triangle），其第三个顶点一行就可以写出来。其后的一切都来自恒等式（identity）$1 + \alpha^2 = \alpha$ 及其相关的式子，例如 $\alpha^3 = -1$。它们把各顶点的表达式化成非常简单的形式，一旦看出这些形式，最后一部分几乎立即可得。

解答

恒等式

由于 $\alpha^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$$1 + \alpha^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \alpha.$$

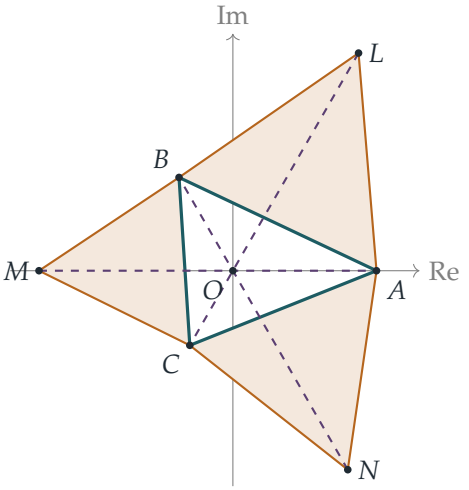
我们还会用到以下几个推论：

- $\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$;
- $1 - \alpha = -\alpha^2$（这是把恒等式移项所得）;
- $\alpha^2 - \alpha = -1$（同样是移项所得）;
- $1 - \alpha = \bar{\alpha} = e^{-i\pi/3}$，因为 $\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$。

最后一项说明，乘以 $1-\alpha$ 相当于顺时针旋转 $60°$。

三角形 ABC

$A = p$ 位于正实轴上，$B = q\alpha^2 = q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ 位于辐角（argument）为 $120°$ 的射线上，而 $C = -r\alpha = r\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ 位于辐角为 $240°$ 的射线上。因此三个顶点分别落在由 O 出发、彼此相隔 $120°$ 的三条射线上，与 O 的距离分别为 p, q, r。原点在三角形之内，而 $A \to B \to C$ 是逆时针方向。下图取 $p = 2$、$q = 1.5$、$r = 1.2$，并同时画出在各边上所作的三角形。



顶点 N、L 和 M

若 XYZ 是一个按顺时针方向标记顶点的等边三角形，那么从 X 出发来看，边 XZ 就是边 XY 绕 X 顺时针旋转 $60°$ 所得。因此

$$Z - X = (Y - X)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = (Y - X)(1 - \alpha), \qquad \text{即} \qquad Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y.$$

? **想一想** 为甚么“顺时针”会令新作的三角形落在 ABC 的外面？

由于 $A \to B \to C$ 是逆时针方向，C 位于有向边 AB 的左方。把 AB 绕 A 顺时针旋转，它便摆向右方，所以 L 与 C 分别位于 AB 的两侧。其余两条边的情况相同，这与图中所见吻合。

N（三角形 CAN，故 $X = C$、$Y = A$）：

$$N = \alpha(-r\alpha) + (1 - \alpha)p = (1 - \alpha)p - \alpha^2 r,$$

正如所求。利用 $1 - \alpha = -\alpha^2$，可把它整理成 $N = -\alpha^2(p + r)$。

L（三角形 ABL，故 $X=A$、$Y=B$）：

$$L=\alpha p+(1-\alpha)q\alpha^2=\alpha p+q(\alpha^2-\alpha^3)=\alpha p+q(1+\alpha^2)=(p+q)\alpha,$$

当中先用 $\alpha^3=-1$，再用 $1+\alpha^2=\alpha$。

M（三角形 BCM，故 $X=B$、$Y=C$）：

$$M=\alpha\cdot q\alpha^2+(1-\alpha)(-r\alpha)=q\alpha^3+r(\alpha^2-\alpha)=-q-r=-(q+r),$$

当中用到 $\alpha^3=-1$ 和 $\alpha^2-\alpha=-1$。

因此，仿照题目所给 N 的形式，

$$L=\alpha p+\alpha q,\qquad M=-q-r,\qquad N=(1-\alpha)p-\alpha^2 r.$$

三条直线

现在把每一对点都看成某个单位复数的正数倍：

$$\begin{aligned}L&=(p+q)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, & C&=-r\alpha=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot(-1),\\ M&=(q+r)\cdot(-1), & A&=p\cdot 1,\\ N&=(p+r)\cdot(-\alpha^2), & B&=q\,\alpha^2.\end{aligned}$$

在每一对之中，两点分别是 u 和 $-u$ 的正实数倍，其中 u 是一个单位复数（分别为 $u=\alpha$、$u=1$ 和 $u=\alpha^2$）。所以这两点位于同一条通过 O 的直线上，并且分处 O 的两侧。由此可知，直线 LC、MA、NB 各自都通过原点，而且原点其实位于每一条线段上。又因为两点分处 O 的两侧，每条线段的长度就是两点与 O 的距离之和：

$$LC=(p+q)+r,\qquad MA=(q+r)+p,\qquad NB=(p+r)+q,$$

全部等于 $p+q+r$，正如所求。

验算

取 $p=1$、$q=2$、$r=3$，由公式得 $L=3\alpha\approx 1.5+2.598\mathrm{i}$、$M=-5$ 和 $N=-4\alpha^2\approx 2-3.464\mathrm{i}$。计算得 $|L-A|=|L-B|=|A-B|=\sqrt{7}$，确认 ABL 是等边三角形。我们又用电脑直接由 $\pm60^\circ$ 的两个旋转作出每个三角形，保留顺时针的那一个，并就 10 000 组随机选取的 p,q,r 确认了三条公式、三线共点（concurrence）于 O，以及共同长度 $p+q+r$。一个漂亮的特殊情况：当 $p=q=r$ 时，三角形 ABC 是以 O 为中心的等边三角形，而整个图形具有预期中的三重旋转对称。

常见错误

- 旋转方向弄错，乘了 α 而不是 $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$。这样 L、M、N 会落在三角形之内，题目所给 N 的形式也推不出来。
- 只证明了 O 在每条直线上，却忘记要得出长度，还需要 O 位于两个端点之间。各实数倍的正负号正好解决这一点。

STEP 之外

这是拿破仑构形（Napoleon's configuration）的一个特殊情况：对任意三角形，在各边向外作等边三角形，直线 AM、BN、CL 都交于同一点（费马点，Fermat point），而且三条线段长度相等。费马点使它到三个顶点的距离总和达到最小；在本题中它就是 O，从这一点看每条边所张的角都是 $120°$。复数把旋转变成乘法，这正是此类证明可以化为简短代数运算的原因。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种几何观点发挥得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。