详细解答

STEP III 2000，第 2 题

纯数学 · 代换积分法

STEP III 2000，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s3-q2

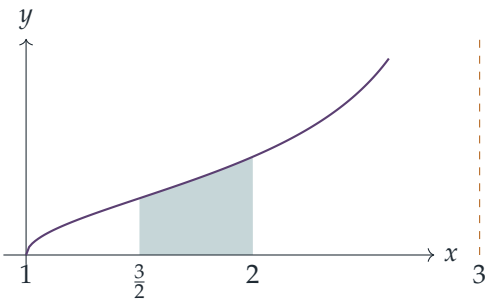
关键思路

像 $(x-1)/(3-x)$ 这类商的平方根，最适合用半角公式（half-angle formulae）处理：设 $x = 2-\cos\theta$，分子变成 $1-\cos\theta$，分母变成 $1+\cos\theta$，而两者之比是一个完全平方，即 $\tan^2\frac{\theta}{2}$。至于一般情况的结果，我们不必把运算重做一遍。只要作一个线性变量代换（linear change of variable），把由 a 到 b 的区间映到由 1 到 3 的区间，一般的积分就会变成第一个积分的倍数。

解答

第一个积分

被积函数（integrand）在 $1 \le x < 3$ 上有定义，而我们的积分范围 $\frac{3}{2} \le x \le 2$ 正好在其中。下图的阴影面积就是所求的积分。



设 $x = 2-\cos\theta$，则 $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。当 $x = \frac{3}{2}$ 时，$\cos\theta = \frac{1}{2}$；当 $x = 2$ 时，$\cos\theta = 0$，所

以我们取 θ 由 $\frac{\pi}{3}$ 到 $\frac{\pi}{2}$。于是

$$x-1=1-\cos\theta=2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\qquad 3-x=1+\cos\theta=2\cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

所以

$$\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac12}=\left|\tan\tfrac{\theta}{2}\right|=\tan\tfrac{\theta}{2},$$

这是因为在我们的范围内 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以正切值为正。

想一想 当被积函数变成 $\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta$ 之后，怎样才可以避免对正切函数求积分?

写出 $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。余弦项会互相抵消：

$$\tan\tfrac{\theta}{2}\,\sin\theta=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}=2\sin^2\tfrac{\theta}{2}=1-\cos\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac12}\mathrm{d}x&=\int_{\pi/3}^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\Big[\theta-\sin\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi/2}\\&=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-1+\frac{\sqrt3}{2}\\&=\frac{\pi+3\sqrt3-6}{6}.\end{aligned}$$

一般的积分

第一个积分就是 $a=1$、$b=3$ 的情况，此时 $p=\frac{3+3}{4}=\frac32$，$q=\frac{1+3}{2}=2$。所以我们要找一个线性代换，把 $u=1$ 送到 $x=a$，把 $u=3$ 送到 $x=b$：

$$x=a+\tfrac12(b-a)(u-1),\qquad \mathrm{d}x=\tfrac12(b-a)\,\mathrm{d}u.$$

于是

$$x-a=\tfrac12(b-a)(u-1),\qquad b-x=(b-a)-\tfrac12(b-a)(u-1)=\tfrac12(b-a)(3-u),$$

又因为 $b-a\neq0$，公因子可以约去：

$$\frac{x-a}{b-x}=\frac{u-1}{3-u}.$$

至于积分上下限：$u=\frac32$ 给出 $x=a+\frac14(b-a)=\frac{3a+b}{4}=p$，而 $u=2$ 给出 $x=a+\frac12(b-a)=\frac{a+b}{2}=q$。由于 $b-a>0$，这个代换是递增的，所以上下限的次序保持不变。因此

$$\begin{aligned}\int_p^q\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac12}\mathrm{d}x&=\frac{b-a}{2}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{u-1}{3-u}\right)^{\frac12}\mathrm{d}u\\&=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{\pi+3\sqrt3-6}{6}=\frac{(b-a)(\pi+3\sqrt3-6)}{12},\end{aligned}$$

其中用到了第一个结果。这正是我们要证明的。

（另一个等价的做法，是直接代入 $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\theta$。上下限同样是 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{2}$，运算过程也一样，只是多了一个因子 $\frac{b-a}{2}$。）

验算

- 数值上，$\frac{1}{6}(\pi + 3\sqrt{3} - 6) \approx 0.38962$。把辛普森法则（Simpson's rule）用于原来的被积函数，在 $[\frac{3}{2}, 2]$ 上计算，所得的值准确至小数点后十位都相同。
- 合理性：被积函数在长度为 $\frac{1}{2}$ 的区间上由 $\sqrt{1/3} \approx 0.577$ 上升至 1，所以面积必定介乎约 0.29 与 0.5 之间。结果确实如此。
- 随机选取 20 组 $a < b$（包括 a 为负数的情况），一般公式都与辛普森法则的结果吻合。
- 缩放：把区间 $[a, b]$ 按因子 k 拉伸，被积函数的取值不变，但 $[p, q]$ 会拉伸 k 倍。所以答案必定与 $b - a$ 成正比，而事实正是这样。

常见错误

- 忘记了 $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，试图只对 $\tan\frac{\theta}{2}$ 关于 θ 求积分。
- 把上下限取为 $\theta = -\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$。无论怎样选取，都必须使 θ 由 $\frac{\pi}{3}$ 递增至 $\frac{\pi}{2}$，并且途经的范围内 $\sin\theta > 0$ 和 $\tan\frac{\theta}{2} > 0$ 都成立。
- 在一般情况中漏掉 $\mathrm{d}x$ 带来的因子 $\frac{1}{2}(b - a)$，结果分母变成 6 而不是 12。

STEP 之外

第二部分说明，定积分（definite integral）在仿射变量代换（affine change of variable）之下的变化是有规律可循的。这就是为甚么像这样的量只通过长度 $b - a$ 依赖于 a 和 b。被积函数本身属于贝塔函数（beta function）类型：在整个区间上，$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(b-a)$，而函数 $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ 在概率和分析中反复出现。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率导论）把它们作为贝塔分布（Beta distribution）的归一化常数（normalising constants）来介绍。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析导论）则严谨地证明了代换法则（substitution rule）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。