详细解答

STEP III 2000，第 13 题

概率与统计 · 概率生成函数

> **STEP III 2000，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q13

关键思路

处理这两个随机变量（random variable），最方便的做法是考虑“尾部”或“累积”事件。第一个六点在第 r 次掷骰之后才出现，当且仅当每一颗骰子在首 r 次掷骰中全部落空；最后一个六点在第 r 次掷骰或之前已经出现，当且仅当每一颗骰子都已经掷出过六点。这两个事件各自都是若干独立事件（independent events）的交集，所以其概率是一个乘积，而把相邻两个值相减便得出分布。一旦认出“第一个六点”这个变量服从几何分布（geometric distribution），与它有关的一切都可以很快求得。

解答

以下一律假设各颗骰子之间互相独立，而每次掷骰之间亦互相独立。对单独一颗骰子，设 X_i 为第 i 颗骰子首次掷出六点时的掷骰次数，则

$$\mathrm{P}(X_i > r) = q^r \qquad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

因为 $X_i > r$ 表示连续 r 次都掷不出六点。于是 $R = \min_i X_i$，$S = \max_i X_i$。

第一个六点

事件 $R > r$ 表示 n 颗骰子在首 r 次掷骰中都没有掷出六点，即全部 nr 次个别投掷的结果都不是六点。由独立性，

$$\mathrm{P}(R > r) = q^{nr}.$$

因此，对 $r \geq 1$，

$$\mathrm{P}(R = r) = \mathrm{P}(R > r-1) - \mathrm{P}(R > r) = q^{n(r-1)} - q^{nr} = q^{nr}(q^{-n} - 1),$$

这正是所求的结果。

记 $Q = q^n$，上式即 $\mathrm{P}(R = r) = Q^{r-1}(1-Q)$：$R$ 服从几何分布，每次把整组骰子掷一次，“成功”（至少出现一个六点）的概率为 $1 - Q$。所以它的概率生成函数（probability generating function，简称 PGF）是一个等比级数（geometric series）：

$$\begin{aligned} G_R(t) = \sum_{r=1}^{\infty} t^r Q^{r-1}(1-Q) &= (1-Q)\, t \sum_{r=1}^{\infty} (Qt)^{r-1} \\ &= \frac{(1-q^n)\, t}{1-q^n t}, \end{aligned}$$

对 $|t| < q^{-n}$ 成立（特别是在 $t = 1$ 附近）。

要求平均值，用商法则（quotient rule）求导：

$$G_R'(t) = (1-q^n)\,\frac{(1-q^n t) + q^n t}{(1-q^n t)^2} = \frac{1-q^n}{(1-q^n t)^2},$$

所以

$$\mathrm{E}(R) = G_R'(1) = \frac{1}{1-q^n}.$$

当 $n = 2$ 且 $p = \frac{1}{6}$ 时，$q^2 = \frac{25}{36}$，故 $\mathrm{E}(R) = 1/\frac{11}{36} = \frac{36}{11}$，正如所求。

最后一个六点

事件 $S \le r$ 表示每一颗骰子都在首 r 次掷骰中的某一次掷出过六点。对一颗骰子而言，这个概率是 $1 - q^r$，而各颗骰子互相独立，所以

$$\mathrm{P}(S \le r) = (1-q^r)^n.$$

把相邻两个值相减，对 $r \ge 1$，

$$\mathrm{P}(S = r) = \mathrm{P}(S \le r) - \mathrm{P}(S \le r-1) = (1-q^r)^n - (1-q^{r-1})^n,$$

正如所求。（当 $r = 1$ 时，第二项是 $0^n = 0$，结果正确。）

> **想一想** 要对 $t^r[(1-q^r)^2 - (1-q^{r-1})^2]$ 求和，看来相当繁复。怎样才可以把它化成等比级数？

当 $n = 2$ 时，把平方展开：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S = r) &= (1 - 2q^r + q^{2r}) - (1 - 2q^{r-1} + q^{2r-2}) \\ &= 2q^{r-1}(1-q) - q^{2(r-1)}(1-q^2) \\ &= 2p\, q^{r-1} - (1-q^2)\,(q^2)^{r-1}. \end{aligned}$$

每一项都是一个几何分布（的倍数），所以

$$G_S(t) = \sum_{r=1}^{\infty} t^r \,\mathrm{P}(S=r) = \frac{2pt}{1-qt} - \frac{(1-q^2)\,t}{1-q^2t}.$$

这个结果合乎情理：由于 $S = X_1 + X_2 - R$，它的分布就是“参数为 p 的几何分布的两倍，减去 R 的分布”。要化简，可把各项通分，以 $(1-qt)(1-q^2t)$ 为公分母，并利用 $1-q^2 = p(1+q)$：

$$\begin{aligned} 2p(1-q^2t) - p(1+q)(1-qt) &= p[\,2 - 2q^2t - 1 - q + qt + q^2t\,] \\ &= p[(1-q) + qt(1-q)] = p^2(1+qt). \end{aligned}$$

因此

$$G_S(t) = \frac{p^2\,t\,(1+qt)}{(1-qt)(1-q^2t)}.$$

作为简单的核对，$G_S(1) = \dfrac{p^2(1+q)}{p\cdot p(1+q)} = 1$。

要求平均值，以拆开的形式求导最为容易，因为每一部分都是一个几何分布的 PGF，它在 1 处的导数就是其平均值乘以相应的系数。对 $\dfrac{(1-a)t}{1-at}$ 而言，在 $t=1$ 处的导数是 $\dfrac{1}{1-a}$（与上面 G_R 的情况完全一样），所以

$$\mathrm{E}(S) = G_S'(1) = 2\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2(1+q)-1}{p(1+q)} = \frac{1+2q}{p(1+q)}.$$

当 $p=\frac{1}{6}$，$q=\frac{5}{6}$ 时：

$$\mathrm{E}(S) = 12 - \frac{36}{11} = \frac{96}{11} \approx 8.73.$$

验算

- $\mathrm{E}(R) + \mathrm{E}(S) = \frac{36}{11} + \frac{96}{11} = 12 = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2)$，这是必然的，因为 $\min + \max = X_1 + X_2$。
- 当 $n=1$ 时，第一个六点与最后一个六点重合，而 G_R 化为单颗骰子的几何分布 PGF $pt/(1-qt)$。
- 以蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation）掷 2×10^5 对骰子，所得样本平均值为 3.274 和 8.709，而理论值为 $\frac{36}{11}\approx3.273$ 和 $\frac{96}{11}\approx8.727$；另外，以数值方法对 G_S 的级数求和，在 t 的若干个取值上都与闭合形式相符。

常见错误

- 把 $\mathrm{P}(S=r)$ 写成“某一颗骰子在第 r 次掷骰时首次掷出六点，而其余骰子在此之前已掷出”，却忘记了两颗骰子在同一次掷骰中首次掷出六点的情况。改用 $\mathrm{P}(S\le r)$ 来处

理，便可完全避免这个问题。

- 对化简后的 G_S 求导，而不是对拆开的形式求导：做法正确，但代数运算多得多，出错的机会也多。

STEP 之外

R 和 S 分别是若干独立随机变量的最小值和最大值，是*顺序统计量*（order statistics）最简单的例子；利用 $\mathrm{P}(\min > r)$ 和 $\mathrm{P}(\max \leq r)$ 这个技巧，对任何分布都适用。具有无记忆性（memoryless）的几何分布，是指数分布（exponential distribution）在离散情况下的近亲；在连续极限之下，n 个指数分布变量的最大值的期望值变成调和和（harmonic sum）$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$（再乘以平均值），这是优惠券收集问题（coupon collector's problem）中的关键一步。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对生成函数及上述各种想法有深入的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。