详细解答

STEP III 2000，第 11 题

力学 • 绕粗糙支点的转动

STEP III 2000，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s3-q11

关键思路

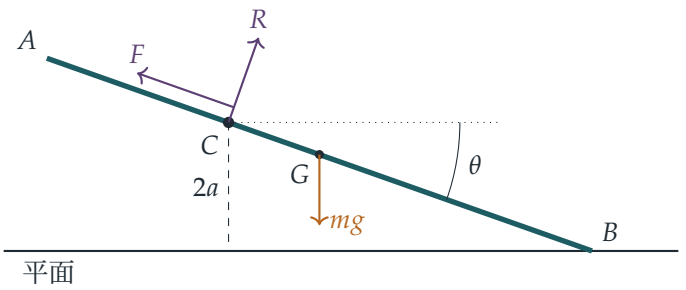
只要没有滑动,棒就只是绕着横梁上的点 C 转动,因此它是一个绕固定轴转动的刚体(rigid body)。由能量可求得角速率（angular speed），由力矩方程可求得角加速度（angular acceleration)。然后对质心（centre of mass）应用牛顿第二定律（Newton's second law)，分别沿棒的方向和垂直于棒的方向分解，便可知道横梁必须提供的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction)。只要摩擦力不超过法向反作用力的 μ 倍，棒就不会滑动，而我们需要这个条件一直成立，直至 B 到达平面为止。

解答

模型与几何

我们把棒视为均匀刚棒，把横梁视为一条固定而粗糙的细线，因此横梁只在 C 处施加单一个接触力：垂直于棒的法向反作用力 R 和沿棒方向的摩擦力 F。

质心 G 是棒的中点，与 A 相距 $4.5a$。由于 $AC = 3a$，G 位于 C 靠 B 的一侧，且 $CG = \frac{3}{2}a$，$CB = 6a$。所以重力对 C 有力矩（moment），棒会倾侧，B 端向下。设 θ 为棒转过的角，即棒与水平线所成的角为 θ。



当 B 下降了 $2a$ 时便到达平面，即当 $6a\sin\theta = 2a$ 时，亦即

$$\sin\theta = \tfrac{1}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

绕 C 的转动

根据平行轴定理（parallel axes theorem），对 C 的转动惯量（moment of inertia）为

$$I_C = \tfrac{1}{12}m(9a)^2 + m\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 = \tfrac{27}{4}ma^2 + \tfrac{9}{4}ma^2 = 9ma^2.$$

在没有滑动的期间，C 固定不动，接触力不作功。G 下降了 $\frac{3}{2}a\sin\theta$，所以由能量守恒（conservation of energy）（从静止开始）得

$$\tfrac{1}{2}(9ma^2)\dot\theta^2 = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta^2 = \frac{g\sin\theta}{3a}.$$

对 C 取力矩（只有重力有力矩）：

$$9ma^2\,\ddot\theta = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \ddot\theta = \frac{g\cos\theta}{6a}.$$

（把能量方程对 t 求导，会得到相同的结果，这是一个有用的验算。）

接触力

G 在以 C 为圆心、半径为 $\frac{3}{2}a$ 的圆上运动，所以它的加速度有一个沿棒指向 C 的分量 $\frac{3}{2}a\dot\theta^2$，以及一个垂直于棒的分量 $\frac{3}{2}a\ddot\theta$，方向为 θ 增加的方向（即垂直于棒向下）。

> ? **想一想** 摩擦力的方向是哪一边？为甚么它不单单是 $mg\sin\theta$？

重力沿棒向下的分量 $mg\sin\theta$ 会把棒朝 B 的方向拉离横梁；此外，G 还需要一个指向 C 的向心力（centripetal force）。两者都必须由摩擦力提供，因此摩擦力沿棒向上，指向 A。沿棒的方向分解，并以指向 C 的方向作为 G 的加速度的正方向：

$$F - mg\sin\theta = m\cdot\tfrac{3}{2}a\dot\theta^2 = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\sin\theta}{3a} = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta,$$

所以

$$F = \tfrac{3}{2}mg\sin\theta.$$

垂直于棒的方向分解，取 G 加速的方向：

$$mg\cos\theta - R = m\cdot\tfrac{3}{2}a\ddot{\theta} = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\cos\theta}{6a} = \tfrac{1}{4}mg\cos\theta,$$

所以

$$R = \tfrac{3}{4}mg\cos\theta,$$

这在整个过程中都是正数，所以棒一直与横梁保持接触。

不滑动的条件

只要 $F \le \mu R$，棒就不会在 C 处滑动，即

$$\frac{F}{R} = \frac{\frac{3}{2}mg\sin\theta}{\frac{3}{4}mg\cos\theta} = 2\tan\theta \le \mu.$$

比值 $2\tan\theta$ 随 θ 递增，在释放时由 0 开始，所以这个条件在最后一刻最难满足，亦即 B 刚到达平面之时。该处 $\tan\theta = 1/(2\sqrt{2})$，所以我们需要

$$\mu \ge 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此 μ 的最小值为

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.}$$

若恰好取这个值，摩擦力只在 B 撞到平面的一瞬间才达到极限；若 μ 再小一点，棒便会在此之前开始滑动。

验算

- 释放时 $\dot{\theta} = 0$，所以 $F = 0$ 而 $R = \frac{3}{4}mg$：横梁所承受的力小于整个重量，因为 G 开始以 $\frac{3}{2}a\ddot{\theta} = \frac{1}{4}g$ 向下加速。这就是常见的“放手后的木板感觉变轻”效应。
- 单位：F 和 R 都是 mg 的倍数，而 μ 是无量纲（dimensionless）的，理应如此。
- 我们由静止开始，用数值方法逐步求解方程 $\ddot{\theta} = g\cos\theta/(6a)$，以有限差分（finite differences）计算 G 的加速度，再由牛顿第二定律还原出 F 和 R。结果与 $\frac{3}{2}mg\sin\theta$ 和 $\frac{3}{4}mg\cos\theta$ 吻合，而 F/R 稳步上升，在 $\sin\theta = \frac{1}{3}$ 时达到 $0.7071\ldots = 1/\sqrt{2}$。

常见错误

- 对棒的中心取力矩，或忘记平行轴定理中的附加项：$I_C = 9ma^2$，而不是 $\frac{27}{4}ma^2$。
- 把问题当作静力学（statics）来处理，取 $F = mg\sin\theta$、$R = mg\cos\theta$，从而得出 $\mu \geq \tan\theta$。其实 G 的向心加速度和切向加速度都会改变这些力。
- 只在释放的一刻检查摩擦条件（那时 $F = 0$），而没有在条件最严苛的位置检查。

STEP 之外

这道题让我们初尝带有约束力（constraint forces）的刚体动力学：我们先由能量和力矩求出运动，然后才对质心应用牛顿定律，倒推出约束必须提供的力。同样的模式（先解出运动，再检查约束是否真的能提供所需的力）可以用来判断梯子何时开始滑动、倾倒的铅笔何时离开桌面，或者珠子何时离开铁线。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）仔细讲解了定轴转动，以及力矩与质心运动之间的关系。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。