详细解答

STEP III 2000，第 10 题

力学 · 极限摩擦力平衡

> **STEP III 2000，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q10

关键思路

先从几何入手：题目选用 $\sqrt{3}\,a$ 和 a 这两个距离，是为了令梁与地面成一个特殊角，而这个角决定了题中所有方向。然后对两个能令未知力消失的点取力矩（moment）。对铰链（hinge）X 取力矩时，梁的方程只含球体给予的法向反作用力（normal reaction），因为球体给予的摩擦力（friction）正好沿著梁本身的方向。对球心取力矩时，除了两个摩擦力之外，其余各力都通过球心，所以两个摩擦力必定相等。

解答

模型与几何

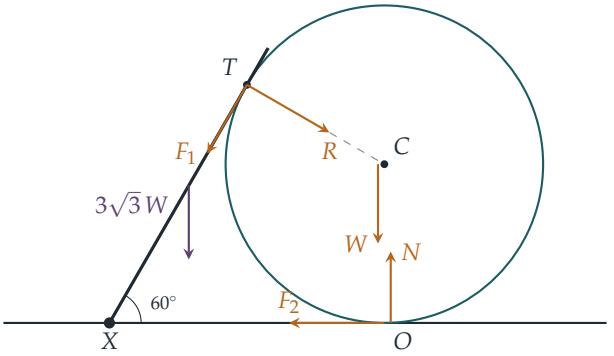
我们把梁视为均匀（uniform）杆，把球体视为均匀刚体（rigid body），其重量作用于球心 C。两个接触点都是粗糙的。设 O 为球体与地面的接触点，则 $OX = \sqrt{3}\,a$，$OC = a$，而 OC 是铅垂的。

梁与球体在点 T 接触，并在该处与球体相切。地面则是由 X 所作的另一条切线（tangent）。在直角三角形 XOC 中，

$$\tan\angle OXC = \frac{a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{所以} \qquad \angle OXC = 30^\circ.$$

由 X 所作的两条切线关于直线 XC 对称，所以梁与地面的夹角是 $2\times 30^\circ = 60^\circ$。由同一点所作的切线长度相等，所以 $XT = XO = \sqrt{3}\,a$。由于 $\sqrt{3}\,a < 2a$，接触点确实在梁上，位置稍稍超过梁的中点。

半径 CT 垂直于梁。因此，在 T 的法向反作用力与水平方向成 30°，而在 T 的摩擦力沿著梁的方向，与水平方向成 60°。



琥珀色的箭头表示作用于球体的力。梁所受的 R 和 F_1 方向与此相反，此外还有作用于梁中点的重量 $3\sqrt{3}\,W$（与 X 相距 a），以及铰链处一个未知的反作用力。

摩擦力的方向是我们猜测的：对球体而言，F_1 沿著梁向下指向 X，而 F_2 沿著地面指向 X。假如猜错了，该力算出来便会是负数。

梁：对 X 取力矩

铰链的反作用力作用于 X，所以它对 X 没有力矩。球体给予的摩擦力沿著梁的方向，而梁所在的直线通过 X，所以它也没有力矩。法向反作用力 R 垂直于梁，作用点的距离为 $XT = \sqrt{3}\,a$。重量的作用线与 X 的水平距离为 $a\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$。因此

$$R \cdot \sqrt{3}\,a = 3\sqrt{3}\,W \cdot \tfrac{1}{2}a, \qquad \text{所以} \qquad R = \tfrac{3}{2}W.$$

球体：对 C 取力矩

R、W 和 N 这三个力都通过 C。（法向反作用力沿半径方向作用。）两个摩擦力都沿切线方向，各与 C 相距 a。在 T 的 F_1 使球体绕 C 向一个方向转动，而在 O 的 F_2 则使它向相反方向转动，所以

$$F_1 a = F_2 a, \qquad \text{所以} \qquad F_1 = F_2.$$

把这个共同的值记为 F。

> ? **想一想** 在对两个摩擦力还一无所知的时候，为甚么我们已经可以肯定它们相等?

球体处于平衡（equilibrium）状态，所以对任何一点的总力矩都是零。选球心最为巧妙：重量和两个法向反作用力都通过球心，于是只剩下两个摩擦力，而它们的力臂（lever arm）同样是 a。

球体：分解力

水平方向（resolving，即把力分解），取远离 X 的方向为正：R 的分量是 $R\cos 30^\circ$，F_1 的分量是 $-F\cos 60^\circ$，而 F_2 的贡献是 $-F$。所以

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{1}{2}F + F = \frac{3}{2}F, \qquad \text{所以} \qquad F = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$

这个值是正数，可见先前猜测的摩擦力方向是对的。铅垂方向，R 向下推，分量为 $R\sin 30^\circ$；F_1 向下拉，分量为 $F\sin 60^\circ$。所以

$$N = W + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F = W + \tfrac{3}{4}W + \tfrac{3}{4}W = \tfrac{5}{2}W.$$

摩擦系数

球体在两个接触点都即将滑动，所以两处的摩擦都达到极限（limiting friction）：$F_1 = \mu_1 R$ 及 $F_2 = \mu_2 N$。因此，两个摩擦系数（coefficient of friction）为

$$\mu_1 = \frac{F}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{3}{2}W} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{5}{2}W} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

验算

- 用坐标作数值验算（$a = 1.3$，$W = 2$），确认了 T 在球面上，而且 CT 垂直于梁。直接解球体的三条平衡方程，得出 $R = 1.5W$、$F_1 = F_2 \approx 0.8660W$ 和 $N = 2.5W$，所以 $\mu_1 \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$，$\mu_2 \approx 0.3464 = \sqrt{3}/5$。
- 一条独立的方程：对球体以 O 为支点取力矩。这时 N、F_2 和 W 都没有力矩。R 的作用线通过 C，所以它的力矩等于其水平分量在高度 a 处的力矩，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}R\,a$。F_1 对 O 的力矩算出来是 $\frac{3}{2}aF$。令两者相等，便再次得到 $F = R/\sqrt{3}$，而无须用到对 C 的力矩方程。
- 两个系数都小于 1，对一般的粗糙接触面来说，这在物理上是合理的。

常见错误

- 把梁的倾角当作 30°（即 XC 的倾角），而不是 60°。
- 求 N 时忘记了 F_1 的铅垂分量。这样会得出 $N = \frac{7}{4}W$，以及错误的 μ_2。
- 在梁对 X 的力矩方程中计入球体给予的摩擦力。这个力沿著梁的方向，所以它对 X 的力矩是零。

STEP 之外

平面上的刚体有三个自由度（degrees of freedom），所以可给出三条独立的平衡方程。本题中，球体有五个未知的接触力，而梁提供了 R，减少了未知数的数目。再加上两个“极限摩擦”条件，问题便成为一个可解的方程组。像这样把方程的数目与未知数的数目互相比较，并辨认出一个系统何时属于静不定（statically indeterminate），正是结构力学（structural mechanics）的起点。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对刚体静力学和力矩（torque）有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。