详细解答

STEP III 2000，第 1 题

纯数学 · 双曲线的切线

> **STEP III 2000，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q1

关键思路

两条曲线都是以原点为中心的等轴双曲线（rectangular hyperbola），而且在半周旋转（half-turn）$(x, y) \mapsto (-x, -y)$ 之下都保持不变。这个对称性（symmetry）让我们不费吹灰之力就得到 Q。至于切线（tangent），巧妙的做法不是硬解联立方程，而是利用 $ab = 1$ 和 $a^2 - b^2 = 2$ 这两个事实，验证题目给出的点同时位于两条直线上。求得四个点之后，绕原点旋转四分之一周就能解释为何得出正方形。

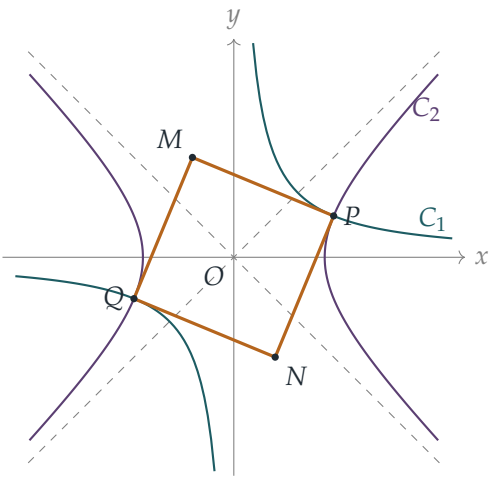
解答

略图

C_1，即 $xy = 1$，是大家熟悉的等轴双曲线，位于第一和第三象限，以两条坐标轴为渐近线（asymptote）。

C_2，即 $x^2 - y^2 = 2$，与 x 轴相交于 $(\pm\sqrt{2}, 0)$，且永不与 y 轴相交（否则需要 $-y^2 = 2$）。写成 $y^2 = x^2 - 2$，可见 $|y| < |x|$，而且当 $|x|$ 很大时 $y \approx \pm x$，所以它的渐近线是 $y = \pm x$。它就是把 C_1 绕原点旋转 45°（并按 $\sqrt{2}$ 的比例放大）所得的曲线，两支分别向左、右开口。

两条曲线在哪里相交？由于 $xy = 1 > 0$，任何公共点都位于第一或第三象限。把 $y = 1/x$ 代入 C_2，得 $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$，所以 $x^2 = 1 + \sqrt{2}$（另一个根 $1 - \sqrt{2}$ 是负数）。因此恰好有两个交点，在这两个象限中各有一个。



图中蓝绿色的是 C_1，紫红色的是 C_2，虚线是 C_2 的渐近线 $y = \pm x$。琥珀色的正方形 $PMQN$ 就是我们即将求出的图形。

点 Q

把 (x, y) 换成 $(-x, -y)$，xy 和 $x^2 - y^2$ 都保持不变。所以若 (a, b) 同时位于两条曲线上，则 $(-a, -b)$ 亦然。由于只有两个交点，

$$Q = (-a, -b).$$

以下我们会一直用到 P 同时位于两条曲线上所带来的两个事实：

$$ab = 1, \qquad a^2 - b^2 = 2.$$

切线

对于 C_1，把 $xy = 1$ 作隐函数求导（implicit differentiation），得 $y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以 C_1 在其上一点 (p, q) 的斜率（gradient）是 $-q/p$。该点的切线是 $p(y - q) = -q(x - p)$，即

$$qx + py = 2pq = 2.$$

对于 C_2，把 $x^2 - y^2 = 2$ 求导，得 $2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以在 (p, q) 的斜率是 p/q。切线是 $q(y - q) = p(x - p)$，即

$$px - qy = p^2 - q^2 = 2.$$

（即使在切线垂直的点，这两个形式仍然成立；它们其实就是曲线的梯度向量（gradient vector）与 (x,y) 的点积。）代入 $P=(a,b)$ 和 $Q=(-a,-b)$：

$$\begin{aligned}
&\text{曲线}C_1\text{ 的切线，切点为}P: \quad bx+ay=2,\\
&\text{曲线}C_2\text{ 的切线，切点为}Q: \quad -ax+by=2,\\
&\text{曲线}C_2\text{ 的切线，切点为}P: \quad ax-by=2,\\
&\text{曲线}C_1\text{ 的切线，切点为}Q: \quad -bx-ay=2.
\end{aligned}$$

点 M

M 是头两条直线的交点。试代入 $(x,y)=(-b,a)$：

$$\begin{aligned}
bx+ay&=-b^2+a^2=2,\\
-ax+by&=ab+ab=2ab=2.
\end{aligned}$$

所以 $(-b,a)$ 同时位于两条直线上。这两条直线并不平行，因为系数的行列式（determinant）是 $b\cdot b-a\cdot(-a)=a^2+b^2\neq 0$，所以它们恰好相交于一点。因此

$$M=(-b,a),$$

正如题目所求。

> **想一想** 验证一个已给出的答案，不是比直接求解来得弱吗?

在这里并非如此。两条不平行的直线恰好相交于一点，所以任何同时位于两条直线上的点就是交点。直接求解当然也可以，但到头来我们还是要用 $ab=1$ 和 $a^2-b^2=2$ 来整理答案。

点 N

同样地，N 是 $ax-by=2$ 与 $-bx-ay=2$ 的交点。代入点 $(b,-a)$ 得

$$ab+ab=2, \qquad -b^2+a^2=2,$$

而行列式是 $a(-a)-(-b)(-b)=-(a^2+b^2)\neq 0$。所以

$$N=(b,-a).$$

***PMQN* 是正方形**

看看这四个位置向量（position vector）：

$$P=(a,b), \quad M=(-b,a), \quad Q=(-a,-b), \quad N=(b,-a).$$

绕 O 逆时针旋转 90° 会把 (x, y) 送到 $(-y, x)$。所以它把 $P \to M \to Q \to N \to P$。这已经暗示了答案；以下是一个直接的论证。

- 对角线 PQ 和 MN 的中点都是 O，所以它们互相平分，$PMQN$ 是平行四边形（parallelogram）。
- 两条对角线的长度都是 $2\sqrt{a^2+b^2}$，所以它们相等，这个平行四边形是长方形。
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = a(-b) + b(a) = 0$，所以对角线互相垂直，这个长方形是菱形（rhombus）。

既是长方形又是菱形的四边形就是正方形。顶点的次序也正确：P、M、Q、N 绕 O 依次相隔四分之一周，所以 $PMQN$ 是沿着正方形绕一圈，而不是自我交叉。因此 $PMQN$ 是正方形。 ■

它的边长的平方是 $|PM|^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2(a^2+b^2)$。由于 $a^2 = 1+\sqrt{2}$ 及 $b^2 = 1/a^2 = \sqrt{2}-1$，这个值是 $4\sqrt{2}$。

验算

- 以数值计算，$a = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.5538$ 及 $b \approx 0.6436$。用数值方法求切线的交点，得 $M \approx (-0.6436,\ 1.5538)$ 和 $N \approx (0.6436,\ -1.5538)$，与所述相符。四条边的长度都是 $2.3784 \approx \sqrt{4\sqrt{2}}$，而且相邻的边互相垂直。
- P 的方向角是 $\arctan(b/a) = \arctan(\sqrt{2}-1) = 22.5^\circ$，刚好在 C_1 的渐近线 $y = 0$ 与 C_2 的渐近线 $y = x$ 的正中间，所以正方形倾斜了 22.5°，正如略图所示。

常见错误

- 把 C_2 的切线写成 $px + qy = 2$。负号十分重要，正是它令整个运算行得通。
- 凭空猜测有反射对称，于是取 $Q = (b, a)$ 或 $(-b, -a)$。对 $y = x$ 的反射会保持 C_1 不变，但不会保持 C_2 不变；只有绕 O 的半周旋转才同时保持两者不变。
- 只证明四边相等。这样只得到菱形；你还需要一个直角（或对角线相等）。

STEP 之外

我们用过的切线公式 $qx + py = 2$ 和 $px - qy = 2$，都是以下一般法则的例子：圆锥曲线（conic）$\mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} = c$ 在 $\mathbf{p}$ 的切线是 $\mathbf{p}^\mathsf{T} A \mathbf{x} = c$。在大学一年级关于二次型（quadratic form）的课程中，你会学到如何用旋转把 A 对角化（diagonalise），这正是 $xy = 1$ 和 $x^2 - y^2 = 2$ 其实是同一条曲线转了 45° 的原因。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 清楚地讲解

了二次型和旋转，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多 STEP 风格的坐标几何题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。