详细解答

STEP II 2000，第 9 题

力学 · 有空气阻力的运动

STEP II 2000，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

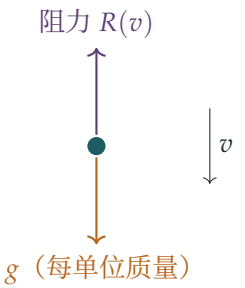
step.maths.org/questions/00-s2-q9

关键思路

每位跳伞者都遵从牛顿第二定律（Newton's second law），而阻力只取决于速率，因此我们得到一条关于 v 和 t 的一阶微分方程（first-order differential equation），而且可以分离变量（separation of variables）。“速率永远达不到”这类结果源自终端速率（terminal speed）：即阻力刚好与重力平衡时的速率。解会慢慢向它靠近，但在有限时间内永远到不了。至于 Karen，只要用无因次（dimensionless）速率 $u = kv/g$ 来表示，那个二次式便可以干净俐落地因式分解。

解答

我们把每位跳伞者看成一个由静止开始垂直下落的质点（particle），重力加速度 g 为常数，方向向下。取 $v \geq 0$ 为向下的速率，并由起跳一刻开始量度 t。以每单位质量计，所受的力是向下的重力 g 和向上的空气阻力（air resistance），所以由牛顿第二定律得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g -$ (每单位质量的阻力)。



Jane 的速率上界

Jane 的运动方程（equation of motion）是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv = k\Big(\frac{g}{k} - v\Big).$$

起初 $v = 0 < g/k$。只要 $v < g/k$，我们便可以除以 $g/k - v > 0$，然后分离变量：

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}w}{g/k - w} = \int_0^t k\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad -\ln\Big(1 - \frac{kv}{g}\Big) = kt,$$

所以

$$v = \frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

这个解对所有 $t \geq 0$ 都成立，因为对任何有限的 t，右边都小于 g/k，而这正是我们做除法时所用的条件。由于 $\mathrm{e}^{-kt} > 0$，对所有 t 都有 $v < g/k$。所以当 $t \to \infty$ 时，Jane 的速率趋向 g/k，但永远达不到这个值。

Karen 的速率上界

Karen 的运动方程是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv - \frac{2k^2}{g}v^2.$$

设 $u = kv/g$，这是一个无因次的速率。于是右边变成

$$g(1 - u - 2u^2) = g(1 - 2u)(1 + u), \qquad \text{及} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(1 - 2u)(1 + u).$$

当 $u = \frac{1}{2}$ 时加速度为零（另一个根 $u = -1$ 并不是物理上合理的速率），即 $v = g/(2k)$。这就是 Karen 的终端速率。

起初 $u = 0 < \frac{1}{2}$。只要 $0 \leq u < \frac{1}{2}$，两个因式都是正数，所以可以分离变量。化成部分分式（partial fractions），

$$\frac{1}{(1 - 2u)(1 + u)} = \frac{2/3}{1 - 2u} + \frac{1/3}{1 + u},$$

这可以在 $1 = A(1 + u) + B(1 - 2u)$ 中代入 $u = -1$ 和 $u = \frac{1}{2}$ 来验证。因此

$$kt = \int_0^u \Big(\frac{2/3}{1 - 2w} + \frac{1/3}{1 + w}\Big)\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\Big[-\ln(1 - 2w) + \ln(1 + w)\Big]_0^u = \frac{1}{3}\ln\frac{1 + u}{1 - 2u}.$$

把 $\dfrac{1 + u}{1 - 2u} = \mathrm{e}^{3kt}$ 重新整理，得

$$u = \frac{\mathrm{e}^{3kt} - 1}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} < \frac{1}{2}.$$

基于与之前相同的理由，这个解对所有 $t \geq 0$ 都成立，所以 Karen 的速率满足

$$v < \frac{g}{2k} \quad \text{对所有} t.$$

这就是对应的结果：她的速率趋近 $g/(2k)$，但永远达不到这个值。

Jane 达到 $g/(3k)$ 所需的时间

在 Jane 的解中令 $v = g/(3k)$，得 $1 - \mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{3}$，所以 $\mathrm{e}^{-kt} = \frac{2}{3}$，而

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{3}{2},$$

正如题目所求。

Karen 达到 $g/(3k)$ 所需的时间

> **想一想** 我们需要以 t 表示 u 的公式吗？还是有更快的途径？

更快的途径是利用以 u 表示 t 的公式，而这个公式我们已经有了。速率为 $g/(3k)$ 即 $u = \frac{1}{3}$，它小于 $\frac{1}{2}$，所以她确实会达到这个速率。于是

$$\frac{1+u}{1-2u} = \frac{4/3}{1/3} = 4, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{1}{3k} \ln 4 = \frac{2}{3k} \ln 2.$$

验算

- 在任何正的速率下，Karen 所受的阻力都比 Jane 大，所以她应该要用更长时间才达到相同的速率。果然，$\frac{2}{3} \ln 2 \approx 0.462$ 大于 $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405$。
- 当 t 很小时，两条公式都给出 $v \approx gt$，即没有阻力的自由下落（free fall），这正是应有的结果。把 $u = (\mathrm{e}^{3kt} - 1)/(2\mathrm{e}^{3kt} + 1) \approx 3kt/3 = kt$ 展开，便得 $v \approx gt$。
- 我们由静止开始，用数值方法逐步求解两条方程（龙格－库塔法（Runge–Kutta），取 $g = 9.8$，$k = 0.7$）。速率一直保持在 14 和 7 以下，这两个数正是 g/k 和 $g/(2k)$；而速率 $g/(3k)$ 分别在 $t \approx 0.5792$ 和 $t \approx 0.6601$ 时达到。这些数值与 $k^{-1} \ln \frac{3}{2}$ 和 $\frac{2}{3k} \ln 2$ 相符，误差约为 10^{-9}。

常见错误

- 单凭加速度为正便断言“速率永远达不到 g/k”。这只说明速率在增加，却不能说明它一直低于 g/k。你需要明确的解，或者论证达到终端速率所需的时间是无限的。
- 弄错 $\ln(1-2u)$ 一项的正负号。对 $\frac{1}{1-2u}$ 积分，得 $-\frac{1}{2} \ln(1-2u)$。

STEP 之外

两条方程都是自治（autonomous）方程：$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$。终端速率是这类方程的稳定平衡点（stable equilibrium）。常微分方程（ODE）的唯一性定理（uniqueness theorem）表

明，当 f 光滑时，解永远不能在有限时间内到达平衡点，这就是两个上界背后的一般原因。Karen 的方程是一条里卡蒂方程（Riccati equation），而同样的逻辑斯蒂型（logistic-type）行为亦见于人口模型。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 涵盖自治方程及其平衡点，而 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* 则讨论有阻力的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。