详细解答

STEP II 2000，第 8 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

> **STEP II 2000，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q8

关键思路

两条方程都是可分离变量（separable）的：含 x 的部分与含 y 的部分以乘积形式出现，所以可以把所有涉及 y 的项放在一边，所有涉及 x 的项放在另一边。两题中 x 的一边都具有 $x\,\mathrm{e}^{ax^2}$ 的形式，由于 x 是 x^2 的导数（derivative）（的倍数），所以可以立即积分。在第 (ii) 部分，$(y+3)$ 的幂次由我们自行选择，而我们选择的幂次要令 y 的增长恰好与 e^{3x^2} 相符。

解答

第 (i) 部分

由于在 $x=0$ 时 $y=6$，起初附近有 $y+3>0$，因此可以除以 $(y+3)^{1/2}$：

$$(y+3)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

两边对 x 积分，并利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$，得

$$2(y+3)^{1/2} = 2\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

代入 $x=0$、$y=6$ 得 $2\cdot 3 = 2 + C$，所以 $C=4$，而

$$(y+3)^{1/2} = \mathrm{e}^{-x^2} + 2.$$

右边恒不小于 2，所以它确实是一个合理的（正）平方根，而且 $y+3$ 永远不会达到 0；因此上面的除法对所有 $x \geq 0$ 都成立。两边平方，得

$$\boxed{y = (2+\mathrm{e}^{-x^2})^2 - 3 = 1 + 4\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-2x^2}}.$$

当 $x\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{-x^2}\to 0$ 且 $\mathrm{e}^{-2x^2}\to 0$，所以 $y\to 1$，正如题目所求。

第 (ii) 部分

这里的方程是

$$(y+3)^{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}.$$

要令一般的（可能不是整数的）幂次有意义，我们需要 $y+3>0$；又由于当 $x>0$ 时 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$，$y$ 是递增的，所以只要 $y+3$ 起初是正数，它就会一直保持正数。当 $k\neq 0$ 时，积分得

$$\frac{(y+3)^k}{k} = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{12} + C, \qquad \text{所以} \qquad (y+3)^k = \frac{k}{12}\,\mathrm{e}^{6x^2} + kC.$$

? **想一想** 我们应该尝试哪一个 k?

若 $k>0$，则当 x 很大时，常数可以忽略，于是 $y+3\approx (k/12)^{1/k}\,\mathrm{e}^{6x^2/k}$。我们希望 y 的增长与 e^{3x^2} 相若，所以需要 $6/k=3$，即 $k=2$。（任何其他 $k>0$ 都会令 $\mathrm{e}^{-3x^2}y$ 趋向 0 或趋向 ∞。）

因此取 $k=2$。这时方程是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}/(y+3)$，其解为

$$(y+3)^2 = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{6} + D,$$

其中 $D=(y_0+3)^2-\frac{1}{6}$，而 y_0 是 y 在 $x=0$ 时的值。右边由 $(y_0+3)^2>0$ 开始递增，所以一直保持正数，而解对每一个 $x\geq 0$ 都存在：

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}\; - 3.$$

乘以 e^{-3x^2}，并把 $\mathrm{e}^{-3x^2}=\sqrt{\mathrm{e}^{-6x^2}}$ 放入根号内，得

$$\mathrm{e}^{-3x^2}y = \sqrt{\tfrac{1}{6}+D\,\mathrm{e}^{-6x^2}}\; - \; 3\mathrm{e}^{-3x^2} \longrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

当 $x\to\infty$ 时成立，因为两个指数项都趋向 0。所以当 $k=2$ 时，极限（limit）是

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-3x^2}y = \frac{1}{\sqrt{6}}},$$

不论初始值是甚么：常数 D 已从答案中消失，这正是题目可以说“任何解”的原因。

当 $k=2$ 时，幂 $(y+3)^{-1}$ 对 $y<-3$ 也有意义。在该分支上 $y+3=-\sqrt{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}$，而同样的论证给出极限 $-1/\sqrt{6}$。题目预期的答案是 $1/\sqrt{6}$，对应 $y>-3$ 的解。

验算

- 在 (i) 中，$x=0$ 给出 $y=(2+1)^2-3=6$，而对 $y=(2+\mathrm{e}^{-x^2})^2-3$ 求导得 $-4x\mathrm{e}^{-x^2}(2+\mathrm{e}^{-x^2}) = -4x\mathrm{e}^{-x^2}(y+3)^{1/2}$。

- 以数值方法（龙格—库塔法，Runge–Kutta）逐步求解两条方程，结果与公式吻合；例如在 (i) 中 $y(2) \approx 1.07360$，而在 (ii) 中，由 $y_0 = 6$ 开始，$\mathrm{e}^{-12} y(2) \approx 0.408230$，已经很接近 $1/\sqrt{6} \approx 0.408248$。

常见错误

- 到平方之后才记起要加积分常数（constant of integration），或者把 $y = 6$ 代入了错误的式子。
- 把 $x\,\mathrm{e}^{6x^2}$ 积分成 $\mathrm{e}^{6x^2}/6$ 而不是 $\mathrm{e}^{6x^2}/12$；这不会改变 k，但会改变极限。

STEP 之外

第 (ii) 部分是渐近分析（asymptotic analysis）的一个小例子：我们无须理会初始值，就找出了解在 x 很大时的表现，因为积分常数被不断增长的项所淹没。探究解的哪些特征与初始条件（initial conditions）无关，正是微分方程（differential equations）定性理论的核心问题。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）涵盖可分离变量方程以及这类长期表现的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。