详细解答

STEP II 2000，第 7 题

纯数学 · 直线与圆锥

> **STEP II 2000，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q7

关键思路

动手做任何事之前，先求出 $\mathbf{s}$ 的长度。$\cos\theta \pm \sqrt{3}$ 这些项是刻意安排的：交叉项会互相抵消，并出现 $\cos^2\theta + \sin^2\theta$，所以 $|\mathbf{s}|$ 完全与 θ 无关。之后的一切都来自纯量积（scalar product）。$s_x - s_z$ 这个组合同样不含 θ，这直接指出了 m 的方向，也解释了为何最后一部分会出现平面 $x - z =$ 常数。

解答

l 与一般直线的夹角

为简便起见，记 $c_\theta = \cos\theta$。$\mathbf{s}$ 的长度为

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}|^2 &= (c_\theta + \sqrt{3})^2 + 2\sin^2\theta + (c_\theta - \sqrt{3})^2 \\ &= 2c_\theta^2 + 6 + 2\sin^2\theta = 8, \end{aligned}$$

因为交叉项 $\pm 2\sqrt{3}\,c_\theta$ 互相抵消。所以对任何 θ，都有 $|\mathbf{s}| = 2\sqrt{2}$。

设 $\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$。则

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d} = a(c_\theta + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\,b\sin\theta + c(c_\theta - \sqrt{3}) = (a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c).$$

因此两条直线的夹角 ϕ 满足

$$\cos\phi = \frac{(a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

直线本身没有指定的方向，所以如果你要的是锐角（acute angle），就取右边的绝对值（modulus）。

直线 m

我们要找一个方向 $\mathbf{d}$，使 $\cos\phi$ 与 θ 无关。观察分子可知，恰好当 $a+c=0$ 且 $b=0$ 时，对 θ 的依赖便会消失。所以试取 $\mathbf{d}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$（$a=1$，$b=0$，$c=-1$）：

$$\cos\phi=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

这个值是正数，所以 ϕ 本身已是锐角，而且对任何 θ 都有 $\phi=\pi/6$。因此，通过原点的直线

$$m:\quad \mathbf{r}=\mu(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$

符合要求。当 θ 变化时，l 扫出一个圆锥（cone），其轴为 m，半顶角（semi-vertical angle）为 $\pi/6$。

P 描出的圆

在 l 上，$x-z=\lambda(s_x-s_z)=\lambda((c_\theta+\sqrt{3})-(c_\theta-\sqrt{3}))=2\sqrt{3}\,\lambda$。令此式等于 $4\sqrt{3}$，便得 $\lambda=2$，不论 θ 是甚么，所以

$$\overrightarrow{OP}=2\mathbf{s}=(2\cos\theta+2\sqrt{3})\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+(2\cos\theta-2\sqrt{3})\,\mathbf{k}.$$

直线 m 与该平面相交于 $\mu-(-\mu)=4\sqrt{3}$ 之处，即 $\mu=2\sqrt{3}$，交点为 C，其中

$$\overrightarrow{OC}=2\sqrt{3}\,\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{k}.$$

想一想 为甚么 C 是圆心的自然人选?

平面 $x-z=4\sqrt{3}$ 的法线（normal）是 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$，正是 m 的方向。所以 m 是圆锥的轴，它垂直于该平面，而任何圆锥被垂直于其轴的平面所截，都会得到一个圆，圆心就在轴与该平面相交之处。现在我们直接验证这一点：

$$\overrightarrow{CP}=2\cos\theta\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+2\cos\theta\,\mathbf{k},\qquad |\overrightarrow{CP}|^2=4\cos^2\theta+8\sin^2\theta+4\cos^2\theta=8.$$

所以 P 的每一个位置都在该平面上，并且与平面上的定点 C 相距 $2\sqrt{2}$。换句话说，P 位于该平面上以 C 为圆心、半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆上，而 C 在 m 上。

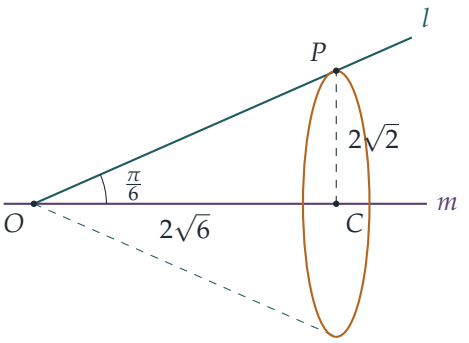
要看出 P 确实描出整个圆，可写成

$$\overrightarrow{CP}=2\sqrt{2}\,(\cos\theta\,\mathbf{u}+\sin\theta\,\mathbf{v}),\qquad \mathbf{u}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}),\quad \mathbf{v}=\mathbf{j}.$$

这里 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是互相垂直的单位向量（unit vector），两者都垂直于 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$，所以它们都平行于该平面。当 θ 由 0 变到 2π 时，P 沿圆走了刚好一圈。半径为

$$\boxed{2\sqrt{2}}.$$

求半径还有一个较快的方法：$|OP| = 2|\mathbf{s}| = 4\sqrt{2}$ 而 $|OC| = 2\sqrt{6}$，且 OC 垂直于该平面，所以由毕氏定理（Pythagoras）得 $CP = \sqrt{32-24} = 2\sqrt{2}$。等价地，$CP = OC\tan\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}/\sqrt{3}$。



验算

- 当 $\theta = 0$ 时，$\mathbf{s} = (1+\sqrt{3}, 0, 1-\sqrt{3})$，其中 $|\mathbf{s}|^2 = (4+2\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3}) = 8$，而 $\mathbf{s}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{k}) = 2\sqrt{3}$，得 $\cos\phi = \sqrt{3}/2$。
- 求半径的两种方法结果一致：$\sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$ 及 $2\sqrt{6}\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{8} \approx 2.828$。
- 数值上，取 20 000 个随机的 θ（一般公式则另取随机的 a, b, c），与 m 的夹角等于 $\pi/6$，P 在该平面上，且 $|CP| = 2.8284\ldots$，误差全部在 10^{-15} 以内。

常见错误

- 忘记除以 $|\mathbf{s}|$，或假设 $\mathbf{s}$ 是单位向量。它的长度是 $2\sqrt{2}$。
- 只证明了 P 在以 O 为球心的球面（sphere）上（即 $|OP| = 4\sqrt{2}$）。球面被平面所截固然得到一个圆，但你仍须说明为何圆心是 m 上的 C：这是因为 OC 垂直于该平面。

STEP 之外

直线 l 扫出一个圆锥，而用平面去截圆锥，正是圆锥曲线（conic sections）名称的由来。垂直于轴的平面截出一个圆；把平面倾斜，便会得到椭圆（ellipse）、抛物线（parabola）或双曲线（hyperbola）。在大学一年级的课程中，你会把圆锥描述为二次曲面（quadric surface）$(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 = |\mathbf{r}|^2\cos^2\alpha$，并利用对称矩阵（symmetric matrix）的特征值（eigenvalues）为这类曲面分类。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）涵盖了这方面的内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。