详细解答

STEP II 2000，第 6 题

纯数学 · 半角代换

> **STEP II 2000，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q6

关键思路

代换（substitution）$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ 可以把任何由 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 组成的有理函数（rational function）化为 t 的有理函数，而在这一题，结果是 2 除以一个二次式。配方（completing the square）之后得到反正切（arctangent），而第一部分的第三个恒等式（identity）正好用来化简上限处的反正切。第二个积分则可凭对称性（symmetry）由第一个积分直接得出，毋须再做新的积分。

解答

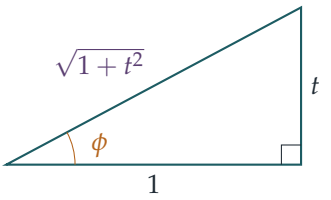
三个恒等式

设 $\phi = \frac{1}{2}\theta$，则 $t = \tan\phi$ 且 $1 + t^2 = \sec^2\phi$。由二倍角公式（double-angle formulae），

$$\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi = 2\tan\phi\cos^2\phi = \frac{2\tan\phi}{\sec^2\phi} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\theta = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi\,(1 - \tan^2\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

（只要 $\tan\frac{1}{2}\theta$ 有定义，即 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$，这两条式子便成立。）下图的直角三角形，两条直角边分别为 1 和 t，夹角为 ϕ，是记住这两条公式的好方法。



至于第三个恒等式，当 $\sin\theta \neq 0$ 时，利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\phi$ 和 $\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi$：

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi} = \cot\phi = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \phi) = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta),$$

因为对余角（complementary angles）而言，$\cot\phi = \tan(\frac{1}{2}\pi - \phi)$。至此三个恒等式均已证明。

第一个积分

设 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$，则 $\theta = 2\arctan t$，所以

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

当 $\theta = 0$ 时，$t = 0$；当 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 时，$t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$。设 $c = \cos\alpha$ 和 $s = \sin\alpha$；由于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，两者皆为正数。于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c\sin\theta} = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2ct}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2ct+1}\,\mathrm{d}t.$$

配方，并利用 $1-c^2 = s^2$，得

$$t^2+2ct+1 = (t+c)^2 + s^2.$$

由于 $s > 0$，由标准积分 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s}$ 可得

$$\int_0^1 \frac{2}{(t+c)^2+s^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\Big[\arctan\frac{t+c}{s}\Big]_0^1 = \frac{2}{s}\left(\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

想一想 怎样化简 $\arctan\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$？

第一部分的功夫在这里派上用场。由第三个恒等式（以 α 代替 θ），$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$。不过，在把 arctan 与 tan 互相抵消之前，必须先检查这个角是否位于 arctan 的值域（range）$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之内。由于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，我们有 $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以确实有

$$\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

同理，$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \tan(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$，而 $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\sin\theta} = \frac{2}{\sin\alpha}\Big((\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha) - (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\Big) = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha},$$

此即所求。

第二个积分

代入 $\theta = \frac{1}{2}\pi - u$。于是 $\cos\theta = \sin u$，$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}u$，而上下限 $0, \frac{1}{2}\pi$ 互换，刚好抵消负号：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin\alpha\sin u}.$$

现在设 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。于是 $\sin\alpha = \cos\beta$，且 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$，所以刚才证明的结果可以套用，只需以 β 代替 α：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos\beta\sin u} = \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

由于 $\sin\beta = \cos\alpha$，我们得出结论：对于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha}.$$

验算

- 当 $\alpha \to 0$ 时，$\cos\alpha \to 1$，第一个积分应趋向 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta} = 1$（作代换后得 $\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1$）；而 $\alpha/\sin\alpha \to 1$，果然吻合。
- 当 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 时，被积函数（integrand）趋向 1，所以第一个积分应趋向 $\frac{1}{2}\pi$，与 $\frac{\pi/2}{1}$ 相符。同样，当 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 时，第二个积分趋向 1，与 $\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{\cos\alpha} \to 1$ 一致。
- 数值上，当 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 时，用辛普森法则（Simpson's rule）算得第一个积分为 1.110721，与 $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1.110721$ 相符；当 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 时，第二个积分算得 $1.047198 \approx \frac{1}{3}\pi$，正如公式所预测。

常见错误

- 忘记 $\mathrm{d}\theta$ 所带来的因子 $\frac{2}{1+t^2}$，或忘记把上下限改为 0 和 1。
- 未检查 x 是否位于 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之内，便写下 $\arctan(\tan x) = x$；在这一题，正是限制条件 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 令这一步成立。
- 为第二个积分把整个积分过程重做一遍，而不利用 $\theta \mapsto \frac{1}{2}\pi - \theta$ 和 $\alpha \mapsto \frac{1}{2}\pi - \alpha$。

STEP 之外

代换 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$（有时称为魏尔斯特拉斯代换，Weierstrass substitution）之所以行得通，是因为点 $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ 是单位圆的一个有理参数化（rational parametrisation）；取 t 为有理数，便可得出所有毕氏三元数组（Pythagorean triple）。在大学里，形

如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分，通常改为设 $z = e^{i\theta}$ 并运用留数定理（residue theorem）来计算，这样就把问题转化为找出单位圆内的极点（poles）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是这个想法的一本精彩入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。