详细解答

STEP II 2000，第 4 题

纯数学 · 辐角与反正切恒等式

> **STEP II 2000，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q4

关键思路

头两个结果说明：复数（complex number）相乘时，它们的辐角（argument）相加。因此，形如“若干个反正切（arctangent）之和 $= \pi/4$”的恒等式，其实是关于 $5-\mathrm{i}$ 和 $1+\mathrm{i}$ 这类高斯整数（Gaussian integer）之乘积的命题：每个满足 $a>0$ 的因子 $a+b\mathrm{i}$ 贡献一个角 $\arctan(b/a)$，而直线 $y=x$ 上任何一点的辐角都是 $\pi/4$。要做的工作是小心地把乘积展开，然后验证两个角确实相等，而不仅仅是相差 2π 的某个倍数。

解答

乘积公式与棣美弗定理

展开并利用 $\mathrm{i}^2=-1$，得

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi) &= (\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)+\mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)\\ &= \cos(\theta+\phi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\phi),\end{aligned}$$

其中用到 $\cos(A+B)$ 和 $\sin(A+B)$ 的复角公式（compound-angle formulae）。

第二个结果（即棣美弗定理，de Moivre's theorem）我们对 n 用数学归纳法（induction）证明。当 $n=1$ 时，两边都是 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$。假设结果对 $n=k$ 成立，则

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta)+\mathrm{i}\sin(k\theta+\theta),\end{aligned}$$

这里先用归纳假设（induction hypothesis），再用取 $\phi=k\theta$ 的乘积公式。所以结果对 $n=k+1$ 成立，因而对每个正整数 n 都成立。

为方便起见，我们把 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 记作 $\operatorname{cis}\theta$。于是我们已证明 $\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}\phi = \operatorname{cis}(\theta+\phi)$ 和 $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$。

关于角的一个事实

若 $a > 0$ 而 b 为实数，则

$$a + b\mathrm{i} = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{cis}(\arctan(b/a)),$$

这是因为角 $\alpha = \arctan(b/a)$ 位于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之内，所以 $\cos\alpha > 0$，而且 $\tan\alpha = b/a$；这两个条件决定了 $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$ 及 $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$。

此外，若 $R\operatorname{cis}S = R'\operatorname{cis}T$ 且 $R, R' > 0$，则取模（modulus）可得 $R = R'$，所以 $\cos S = \cos T$ 及 $\sin S = \sin T$，因此 $S - T$ 是 2π 的倍数。

第一个恒等式

设 $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$。则 $5 - \mathrm{i} = \sqrt{26}\operatorname{cis}(-\alpha)$ 及 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$，所以由上面的结果得

$$(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 26\sqrt{2}\,\operatorname{cis}(\tfrac{\pi}{4} - 2\alpha).$$

另一方面，直接展开可得

$$(5-\mathrm{i})^2 = 24 - 10\mathrm{i}, \qquad (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 24 + 24\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 10 = 34 + 14\mathrm{i},$$

而 $34 + 14\mathrm{i} = \sqrt{1352}\operatorname{cis}\beta$，其中 $\beta = \arctan\frac{14}{34} = \arctan\frac{7}{17}$。两相比较，$\frac{\pi}{4} - 2\alpha$ 与 β 相差 2π 的某个倍数。

> **想一想** 我们怎样知道这个 2π 的倍数是零？

我们把两个角的范围都确定下来。由于 $0 < \frac{1}{5} < 1$，我们有 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$。另外 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$。$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 内的两个角相差必定小于 2π，所以该倍数是零，即 $\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$。也就是说，

$$\arctan\tfrac{7}{17} + 2\arctan\tfrac{1}{5} = \frac{\pi}{4},$$

这正是所要证明的。

第二个恒等式

同样的想法提示我们考虑 $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$，它的辐角应该就是等式的左边。逐步相乘：

$$\begin{aligned}(4+\mathrm{i})^2 &= 15 + 8\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3 &= (15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 52 + 47\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i}) &= (52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i}) = 993 + 992\mathrm{i}.\end{aligned}$$

这已经非常接近直线 $y = x$，而最后一个因子正好完成余下的工作：

$$\begin{aligned}(993 + 992\mathrm{i})(1985 + \mathrm{i}) &= (993 \times 1985 - 992) + (993 + 992 \times 1985)\mathrm{i} \\ &= 1970113 + 1970113\,\mathrm{i} = 1970113\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\ \tfrac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

（如果你好奇 1985 从何而来：要求 $(993 + 992\mathrm{i})(a + \mathrm{i})$ 的实部与虚部相等，便得 $993a - 992 = 992a + 993$，所以 $a = 1985$。）

现在设 $p = \arctan\frac{1}{4}$、$q = \arctan\frac{1}{20}$ 及 $r = \arctan\frac{1}{1985}$。根据上面关于角的事实，$4 + \mathrm{i}$、$20 + \mathrm{i}$、$1985 + \mathrm{i}$ 分别是 $\mathrm{cis}\,p$、$\mathrm{cis}\,q$、$\mathrm{cis}\,r$ 的正实数倍，所以它们的乘积是 $\mathrm{cis}(3p + q + r)$ 的正实数倍。与上一行比较，$3p + q + r - \frac{\pi}{4}$ 是 2π 的倍数。

p, q, r 各自位于 $(0, \frac{\pi}{4})$ 之内，因为它们的正切值都位于 $(0, 1)$ 之内，所以 $0 < 3p + q + r < \frac{5\pi}{4}$。因此 $3p + q + r$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 相差小于 2π，该倍数是零，于是

$$3\arctan\tfrac{1}{4} + \arctan\tfrac{1}{20} + \arctan\tfrac{1}{1985} = \frac{\pi}{4}.$$

验算

模必须吻合：$|34 + 14\mathrm{i}|^2 = 1156 + 196 = 1352 = 26^2 \times 2$，正如所料。至于第二个乘积，$17^3 \times 401 \times (1985^2 + 1)$ 应该等于 2×1970113^2，而事实确是如此。在数值上，用计算机计算，两个等式的左边都等于 $0.785398163\ldots = \pi/4$；例如 $\arctan\frac{7}{17} \approx 0.390607$ 而 $\frac{\pi}{4} - 2\arctan\frac{1}{5} \approx 0.390607$。

常见错误

- 由复数相等直接推断角相等，而没有排除两者相差 $2\pi k$ 的可能。关于范围的论证是证明中不可或缺的一环。
- 计算 $(5 - \mathrm{i})^2$ 时出现正负号错误：它等于 $24 - 10\mathrm{i}$，所以 $5 - \mathrm{i}$ 贡献的是 $-\arctan\frac{1}{5}$，这就是为甚么该反正切移到另一边后带着正号。
- 计算大数乘积时出现算术错误；可如上文所述，用模来验算。

STEP 之外

这类恒等式称为梅钦类公式（Machin-type formulae）；梅钦（John Machin）的 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ 是用同样的方法由 $(5 + \mathrm{i})^4(239 - \mathrm{i})$ 得出的，并在 1706 年用来把 π 计算到小数点后一百位。其背后的结构是高斯整数 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 的算术，当中分解为高斯质数（Gaussian primes）的唯一分解性（unique factorisation）解释了哪些这类恒等式有可能

存在。想了解乘法作为旋转的几何意义，可阅读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像方式讲解复分析）；想了解高斯整数，可阅读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（数论入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。