详细解答

STEP II 2000，第 3 题

纯数学 · 误差传递

> **STEP II 2000，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q3

关键思路

余弦定理（cosine rule）把 a^2 准确地用 b、c 和 A 表示出来，所以整道题要问的，就是当这三个量各自稍作变动时，a 会怎样随之改变。把每个组成部分都按微小量展开至一阶（first order），舍去微小量之间的乘积，最后利用 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ 开平方。至于取值范围，留意 η 是若干个独立误差的线性组合（linear combination），所以当每一项都取到极端值，而且正负号都取得有利时，它便达到最大。

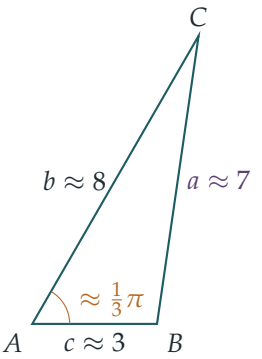
解答

a 的近似式

取未受扰动的数值 $b = 8$、$c = 3$、$A = \frac{1}{3}\pi$，余弦定理给出

$$a^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 49,$$

所以 $a = 7$。这就解释了首项的来历。



现在加入扰动。以下“≈”一律表示只保留 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的一阶项，而舍去所有二次或更高次的项，例如 ϵ_1^2 或 $\epsilon_2\epsilon_3$。于是

$$\begin{aligned} b^2 &= 64 + 16\epsilon_1 + \epsilon_1^2 \approx 64 + 16\epsilon_1, \\ c^2 &= 9 + 6\epsilon_2 + \epsilon_2^2 \approx 9 + 6\epsilon_2, \\ bc &= 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2. \end{aligned}$$

至于角度，由复角公式（compound-angle formula）和小角近似（small-angle approximation）$\cos\epsilon_3 \approx 1$、$\sin\epsilon_3 \approx \epsilon_3$，可得

$$\cos A = \cos\tfrac{1}{3}\pi\cos\epsilon_3 - \sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\epsilon_3 \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3.$$

（$\cos\epsilon_3 \approx 1$ 的误差属于 ϵ_3^2 的数量级，所以在这一阶的精确度下确实可以忽略。）把括号乘开，并再次舍去微小量之间的乘积，

$$2bc\cos A \approx 2(24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3\right) \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3.$$

把各部分代入余弦定理，

$$\begin{aligned} a^2 &\approx (64 + 16\epsilon_1) + (9 + 6\epsilon_2) - (24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3) \\ &= 49 + 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3. \end{aligned}$$

设 $\delta = 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3$，这是一个微小量。由于 $a > 0$，

$$a = \sqrt{49 + \delta} = 7\left(1 + \frac{\delta}{49}\right)^{1/2} \approx 7\left(1 + \frac{\delta}{98}\right) = 7 + \frac{\delta}{14},$$

这里用了二项式展开（binomial expansion）$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$，适用于微小的 x。因此 $a \approx 7 + \eta$，其中

$$\eta = \frac{13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3}{14},$$

这正是所求的结果。

想一想 我们能否避免逐项手算这些乘积的展开?

可以：对 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 求微分，得到 $2a\,\delta a = (2b - 2c\cos A)\,\delta b + (2c - 2b\cos A)\,\delta c + 2bc\sin A\,\delta A$。在 $a = 7$、$b = 8$、$c = 3$、$A = \frac{1}{3}\pi$ 时，上式变成 $14\,\delta a = 13\,\delta b - 2\,\delta c + 24\sqrt{3}\,\delta A$，一行便得出相同的答案。两种方法其实都只是一阶泰勒展开（Taylor expansion）。

η 的取值范围

试卷上 ϵ_2 的界限印作 $4\cdot 9\times 10^{-2}$，用的是旧式的居中小数点，所以它的意思是 $|\epsilon_2| \le 4.9\times 10^{-2}$。

三个误差各自独立地变化，所以由三角不等式（triangle inequality），

$$|\eta| \le \frac{13|\epsilon_1| + 2|\epsilon_2| + 24\sqrt{3}\,|\epsilon_3|}{14} \le \frac{13\times 2\times 10^{-3} + 2\times 4.9\times 10^{-2} + 24\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 10^{-3}}{14}.$$

分子是 $0.026 + 0.098 + 0.072 = 0.196$，所以

$$|\eta| \le \frac{0.196}{14} = 0.014.$$

这个界限是可以达到的：取 $\epsilon_1 = 2\times 10^{-3}$、$\epsilon_2 = -4.9\times 10^{-2}$、$\epsilon_3 = \sqrt{3}\times 10^{-3}$，便令 η 的每一项都是正数，而且尽可能大，得出 $\eta = 0.014$；把三个正负号全部反过来，则得出 $\eta = -0.014$。由于 η 是各误差的连续函数（continuous function）（其实更是线性函数），而容许的误差所组成的集合是一个长方体，所以两者之间的每一个值也都能取到。因此取值范围是

$$-0.014 \le \eta \le 0.014,$$

也就是说，a 大约落在 7 ± 0.014 之内。

验算

- 当所有误差都是零时，三角形的三边是 8、3、7，并有一个 60° 的角，而确实有 $64 + 9 - 24 = 49$。
- 取上述的极端误差，准确的余弦定理给出 $a \approx 7.0141$ 和 $a \approx 6.9861$，与 7 ± 0.014 非常接近；当中的微小差异来自被舍去的二阶项。
- 以数值计算，a 对 A 的偏导数（partial derivative）在基准值处是 $2.9692\ldots = 24\sqrt{3}/14$，与预期相符。

常见错误

- 忘记最后要开平方：$a^2 \approx 49 + \delta$ 给出的是 $a \approx 7 + \delta/14$，而不是 $7 + \delta$。
- 求最大值时把三个误差都取正数：ϵ_2 前面带负号，所以它必须取负数才能把 η 推高。
- 把 $4 \cdot 9 \times 10^{-2}$ 读成 36×10^{-2}；对于一条长度为 3 的边来说，这根本算不上是微小的误差。

STEP 之外

这就是通过全微分（total differential）进行的误差传播（error propagation）：对于多变量函数 f，有 $\delta f \approx \sum (\partial f/\partial x_i)\,\delta x_i$，而最坏的情况是 $\sum |\partial f/\partial x_i|\,|\delta x_i|$。在大学一年级的课程中，这会发展成多变量的泰勒定理（Taylor's theorem），并附有二阶余项（remainder）的明确界限，让你确切知道“≈”到底有多准确。实验科学家则往往改用适用于独立随机误差的方和根法则（root-sum-of-squares rule）。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）对带余项的泰勒定理有严谨细致的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。