详细解答

# STEP II 2000，第 2 题

纯数学 · 多项式的重根

> **STEP II 2000，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q2

## 关键思路

重复因式（repeated factor）经过求导后仍然保留，只是每求导一次，幂次便减一。因此，四次幂的因式 $(x-a)^4$ 会迫使 p 及其首三阶导数（derivative）在 $a$ 处全部等于零。对于这个六次多项式（sextic），三阶导数只是一个三次式，它的根给出一张很短的 $a$ 的候选名单。我们逐一检验这些候选值，最后才决定 $k$，因为一求导，$k$ 便会消失。

## 解答

### 第一个结果

假设 $(x-a)^2$ 是因式，即对某个多项式（polynomial）q 有 $\mathrm{p}(x)=(x-a)^2\,\mathrm{q}(x)$。由积法则（product rule），

$$\mathrm{p}'(x)=2(x-a)\,\mathrm{q}(x)+(x-a)^2\,\mathrm{q}'(x)=(x-a)[\,2\mathrm{q}(x)+(x-a)\mathrm{q}'(x)\,].$$

代入 $x=a$ 便得 $\mathrm{p}'(a)=0$，正是所求。

### 相应的结果

同样的计算适用于任何幂次。若 $\mathrm{f}(x)=(x-a)^m\,\mathrm{g}(x)$，其中 $m\geq 1$，而 g 是多项式，则

$$\mathrm{f}'(x)=(x-a)^{m-1}[\,m\,\mathrm{g}(x)+(x-a)\,\mathrm{g}'(x)\,],$$

而方括号内的式子仍然是多项式。所以若 $(x-a)^m$ 整除 f，则 $(x-a)^{m-1}$ 整除 $\mathrm{f}'$。

现设 $(x-a)^4$ 是 $\mathrm{p}(x)$ 的因式。把上述事实连用三次，

$$(x-a)^3 \text{ 整除}\mathrm{p}'(x),\qquad (x-a)^2 \text{ 整除}\mathrm{p}''(x),\qquad (x-a) \text{ 整除}\mathrm{p}'''(x).$$

再加上 $(x-a)^4$ 整除 $\mathrm{p}(x)$ 本身，代入 $x=a$ 便得

$$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0.$$

**求 $k$**

设 $\mathrm{p}(x)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+k$。求导三次，

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x)&=6x^5+20x^4-20x^3-120x^2-80x+32,\\ \mathrm{p}''(x)&=30x^4+80x^3-60x^2-240x-80=10\,(3x^4+8x^3-6x^2-24x-8),\\ \mathrm{p}'''(x)&=120x^3+240x^2-120x-240=120\,(x^3+2x^2-x-2).\end{aligned}$$

**想一想** 四个条件之中，应该先用哪一个?

先用最容易解的那一个。常数 $k$ 已从 $\mathrm{p}'''$ 中消失，而且 $\mathrm{p}'''$ 只是三次式，可用分组法因式分解（factorise）：

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x-1)(x+1).$$

所以根据相应的结果，$a$ 必定是 $-2$、$1$ 或 $-1$。我们把它们逐一代入 $\mathrm{p}''$ 检验：

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(1)&=3+8-6-24-8=-27\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-1)&=3-8-6+24-8=5\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-2)&=48-64-24+48-8=0.\end{aligned}$$

只有 $a=-2$ 过关。它同样通过 $\mathrm{p}'$ 的检验：

$$\mathrm{p}'(-2)=-192+320+160-480+160+32=0.$$

最后，由 $\mathrm{p}(-2)=0$ 便可确定 $k$：

$$\mathrm{p}(-2)=64-128-80+320-160-64+k=k-48=0,\qquad \text{所以}\qquad \boxed{k=48}.$$

**想一想** 我们只用了*必要*条件。怎样知道当 $k=48$ 时，$(x+2)^4$ 真的是因式?

事实上，$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0$ 这四个条件确实蕴含 $(x-a)^4$ 是因式（由多项式的泰勒定理（Taylor's theorem）可得）。不过，最快捷的确认方法是直接乘开。由于 $(x+2)^4=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$，商式必定是首项系数为一（monic）的二次式，其常数项为 $48/16=3$。比较 $x^5$ 的系数，得出 $x^2-4x+3$，而且确实有

$$(x+2)^4(x^2-4x+3)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+48.$$

所以，当 $k = 48$ 时，

$$x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48 = (x+2)^4(x-1)(x-3),$$

而这个因式符合所要求的形式，其中 $a = -2$。

## 验算

- 把 $(x+2)^4(x-1)(x-3)$ 完全展开：每个系数都与题目给出的多项式相符，而常数项是 $16 \times 3 = 48$。
- 检验系数之和：$\mathrm{p}(1) = 1 + 4 - 5 - 40 - 40 + 32 + 48 = 0$，这是必然的，因为 $(x-1)$ 是因式。
- 我们用电脑在随机选取的多项式 $(x-a)^4\mathrm{q}(x)$ 上验证了一般结果，求得 $\mathrm{p}'''$ 的根为 $-2, \pm 1$，而 $\mathrm{p}''$ 只在 $-2$ 处等于零，并得出 $k = 48$。

## 常见错误

- 从 $\mathrm{p}(a) = 0$ 或 $\mathrm{p}'(a) = 0$ 入手。这两个条件牵涉五次式或 $k$ 本身，难以迅速得出结果。应从次数最低的导数开始。
- 找到 $\mathrm{p}'''$ 的根便停下来。候选值 $a = \pm 1$ 是 $\mathrm{p}'''$ 的根，却不是 $\mathrm{p}''$ 的根。
- 只把相应的结果写成“$\mathrm{p}'''(a) = 0$”。应写出完整的一组条件 $\mathrm{p}(a) = \mathrm{p}'(a) = \mathrm{p}''(a) = \mathrm{p}'''(a) = 0$，并加以证明。

## STEP 之外

逆命题（converse）同样成立：$(x-a)^m$ 整除 $\mathrm{p}$，当且仅当 $\mathrm{p}$ 及其首 $m-1$ 阶导数在 $a$ 处都等于零。这是因为多项式等于它自身在 $a$ 处的泰勒展开式。在大学一年级的代数课程中，同一想法用来定义根的重数（multiplicity）。它还提供了一个判别重根的方法：用欧几里得算法（Euclid's algorithm）计算 $\gcd(\mathrm{p}, \mathrm{p}')$。在某些域（field）上，例如模质数的整数，形式导数（formal derivative）会有出人意表的表现。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）对此有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。