详细解答

STEP II 2000，第 11 题

力学 · 弹性绳与简谐运动

STEP II 2000，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s2-q11

关键思路

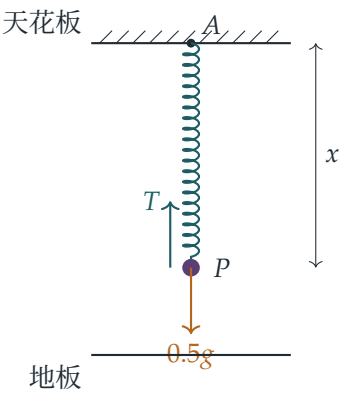
用能量可以很快解决两个定性的结论：把释放时储存的弹性势能（elastic potential energy），与到达自然长度（natural length）及到达天花板所需的重力势能作比较。至于时间，则把运动分成两个阶段：弹性绳拉紧时，质点绕其平衡位置（equilibrium position）作简谐运动（simple harmonic motion）；弹性绳一旦松弛，质点便只在重力作用下自由运动。回程就是把上升的过程倒过来走一遍，所以我们把上升所需的时间加倍。

解答

我们把 P 视为系于一条轻弹性绳上的质点（particle），弹性绳服从胡克定律（Hooke's law），并且没有空气阻力。设 x 为 P 在 A 之下的距离，以向下为正，单位为米。当 $x > 1.5$ 时弹性绳拉紧，此时其伸长量（extension）为 $x - 1.5$，张力（tension）为

$$T = \frac{\lambda}{l}(x - 1.5) = \frac{5g}{1.5}(x - 1.5) = \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

房间高 2.5 m，所以 P 由 $x = 2$ 出发，伸长量为 0.5 m。



弹性绳变得松弛

释放时，储存的弹性势能为

$$\frac{\lambda e^2}{2l} = \frac{5g\,(0.5)^2}{2(1.5)} = \frac{5g}{12}\,\text{J}.$$

弹性绳要回复到自然长度，P 必须上升 0.5 m，所增加的势能为 $0.5g \times 0.5 = \frac{g}{4}$ J。由于 $\frac{5g}{12} > \frac{g}{4}$，$P$ 到达 $x = 1.5$ 时仍在向上运动，其动能（kinetic energy）为

$$\tfrac{1}{2}(0.5)v^2 = \frac{5g}{12} - \frac{g}{4} = \frac{g}{6}, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = \frac{2g}{3}.$$

因此它会越过弹性绳处于自然长度的那一点，继续向上，弹性绳于是变得松弛。

P 不会到达天花板

要到达天花板，P 须由起点上升 2 m，势能要增加 $0.5g \times 2 = g$ J。可用的能量就只有释放时储存在弹性绳中的 $\frac{5g}{12}$ J（弹性绳一旦松弛便不储存任何能量），而 $\frac{5g}{12} < g$。所以 P 不可能到达天花板。

更准确地说，弹性绳松弛之后，P 是一个以速率 v 沿铅垂方向运动的抛体（projectile），所以它会再上升 $\dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{1}{3}$ m。它的最高点位于 $x = 1.5 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$，仍在天花板之下 $\frac{7}{6}$ m。

弹性绳拉紧时的简谐运动

当 $x > 1.5$ 时，由牛顿第二定律（Newton's second law）（以向下为正）得

$$0.5\,\ddot{x} = 0.5g - \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

平衡位置就是右边等于零之处：$x - 1.5 = 0.15$，所以 $x = 1.65$。设 $y = x - 1.65$，即在平衡位置之下的位移（displacement）。于是

$$\ddot{y} = 2g - \frac{20g}{3}(y + 0.15) = -\frac{20g}{3}\,y,$$

这是绕 $y=0$ 的简谐运动，其中 $\omega^2=\dfrac{20g}{3}$。只要弹性绳处于拉紧状态，这结果便成立，正如题目所要求。

返回所需的时间

P 由静止出发，起点为 $y=2-1.65=0.35$，所以在弹性绳拉紧期间

$$y=0.35\cos\omega t.$$

弹性绳在 $x=1.5$ 时变得松弛，即 $y=-0.15$。所以首次出现这情况的时刻 t_1 满足

$$\cos\omega t_1=-\frac{0.15}{0.35}=-\frac{3}{7}.$$

想一想 $\cos\omega t_1=-\frac{3}{7}$ 的各个解之中，我们要的是哪一个？又怎样用 arccos 把它写出来？

当 t 由 0 开始增加时，ωt 亦由 0 开始增加，而 $\cos\omega t$ 首次达到 $-\frac{3}{7}$ 时，ωt 位于 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 之内。由于 $\arccos\frac{3}{7}\in(0,\frac{\pi}{2})$ 且 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，这个值就是 $\omega t_1=\pi-\arccos\frac{3}{7}$。因此

$$t_1=\frac{1}{\omega}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right)=\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right).$$

（作为验算，此时的速率为 $\omega\sqrt{0.35^2-0.15^2}=\sqrt{\frac{20g}{3}\times0.1}=\sqrt{\frac{2g}{3}}$，与能量计算的结果吻合。）

弹性绳松弛期间，P 只在重力作用下运动。它以速率 $v=\sqrt{2g/3}$ 向上离开 $x=1.5$，然后以相同的速率向下回到 $x=1.5$，所需时间为

$$t_2=\frac{2v}{g}=\frac{2}{g}\sqrt{\frac{2g}{3}}=\left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}.$$

若作用力只取决于位置，运动便是可逆的。P 在 $x=1.5$ 重新进入拉紧区域时，速率与离开时相同，于是它把简谐运动阶段倒过来重走一遍，再用 t_1 的时间在 $y=0.35$（即原来的位置）静止下来。总时间为

$$\begin{aligned}2t_1+t_2&=2\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right)+\left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}\\&=\left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}+\left(\frac{3}{5g}\right)^{1/2}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right),\end{aligned}$$

其中用到 $2\sqrt{3/(20g)}=\sqrt{12/(20g)}=\sqrt{3/(5g)}$。这就是所要求的结果。

验算

- 求自然长度处速率的两种方法（能量法，以及简谐运动的 $v^2 = \omega^2(a^2 - y^2)$）同样得出 $v^2 = \frac{2g}{3}$。
- 取 $g = 9.8$，公式给出约 1.0199 s。以数值方法逐步求解运动方程（当 $x < 1.5$ 时把张力关掉），得出返回起点并静止所需的时间相同，而最高点亦在天花板之下 $\frac{7}{6}$ m。
- 若没有松弛阶段，简谐运动的周期（period）会是 $2\pi/\omega \approx 0.77$ s。我们的 $2t_1 \approx 0.50$ s 比这个值小，这是应有的结果，因为只完成了振动的一部分。

常见错误

- 把简谐运动的中心写成自然长度处，而不是平衡位置。重力把中心移到伸长量为 0.15 m 之处。
- 取 $\omega t_1 = \arccos(-\frac{3}{7})$，却没有认出这就是 $\pi - \arccos\frac{3}{7}$。
- 忘记回程：所求的时间包括上升*以及*返回，所以两个阶段都要加倍。

STEP 之外

这是一个分段定义的，或称“非光滑”（non-smooth）的动力系统（dynamical system）：不同的区域适用不同的运动方程，而各段的解则在边界处通过位置和速度的配对拼接起来。同样的想法也支配着弹跳的球、碰撞和开关电路，而我们用过的可逆性论证，正是初次窥见保守系统（conservative system）中的时间反演对称性（time-reversal symmetry）。想了解更多，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。