详细解答

STEP II 2000，第 10 题

力学 · 连接滑轮系统

STEP II 2000，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

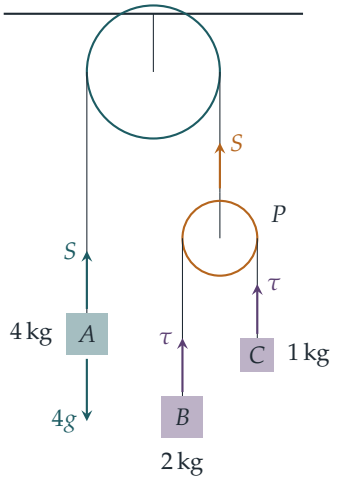
step.maths.org/questions/00-s2-q10

关键思路

这是一部双重阿特伍德机（double Atwood machine）。当 A 被固定时，第二个滑轮（pulley）不动，B、C 组成一部普通的阿特伍德机。一旦放开 A，第二个滑轮也会移动，所以最干净利落的入手方法，是量度 B 和 C 相对于该滑轮的运动，并利用“轻滑轮所受合力（net force）为零”这个事实：滑轮上方的绳的拉力，恰好是下方那条绳的张力（tension）的两倍。

解答

我们把各质点（particle）视为点质量，把绳视为轻（light）而不可伸长（inextensible），并把两个滑轮都视为光滑（smooth）而轻。称第二个滑轮为 P。所有加速度（acceleration）一律取向下为正，以 S 表示穿过 A 的那条绳的张力，以 τ 表示 BC 的张力，而 g 的单位为 $\mathrm{m\,s^{-2}}$。



由于 P 是轻的，它所受的合力必定为零（否则它的加速度会是无限大）。它被 S 向上拉，两边又各被 τ 向下拉，所以在任何时刻都有

$$S = 2\tau$$

。

第一阶段：A 被固定

A 被固定不动时，绕过固定滑轮的绳不会移动，所以 P 固定不动。这时 B 和 C 就是一部普通的阿特伍德机：若 B 以 a 向下加速，则 C 以 a 向上加速。由牛顿第二定律（Newton's second law）得

$$2a = 2g - \tau, \qquad 1 \cdot a = \tau - g.$$

两式相加，得 $3a = g$，所以

$$a = \tfrac{1}{3}g, \qquad \tau = \tfrac{4}{3}g.$$

因此 B 向下加速，C 向上加速，大小各为 $\frac{1}{3}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$。

在这个阶段结束时（$t = T$），B 正向下运动，C 正向上运动，速率各为 $\frac{1}{3}gT$，而 B 已下降了 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}g\,T^2 = \frac{1}{6}gT^2$。在整个阶段中，$A$ 和 P 都静止不动。

第二阶段：全部自由运动

设 A 的加速度为 a_A（向下）。绕过固定滑轮的绳长度不变，所以 P 的加速度为 $-a_A$：A 下降得多快，它就上升得多快。

> ? **想一想** 当 B 和 C 所悬挂的滑轮本身也在加速时，我们该怎样描述它们的加速度？

相对于 P 而言，绳 BC 的表现与固定的阿特伍德机完全一样：若 B 相对于 P 以加速度 r 向下运动，则 C 相对于 P 以加速度 r 向上运动。再加上 P 本身的加速度，得

$$a_B = -a_A + r, \qquad a_C = -a_A - r.$$

现在对每个质点应用牛顿第二定律（向下为正），并利用 $S = 2\tau$：

$$\begin{aligned} A:&\quad 4a_A = 4g - 2\tau,\\ B:&\quad 2(-a_A + r) = 2g - \tau,\\ C:&\quad 1(-a_A - r) = g - \tau. \end{aligned}$$

由 A 的方程得 $\tau = 2g - 2a_A$。把它代入 B 的方程，得 $-2a_A + 2r = 2a_A$，所以 $r = 2a_A$。把两者都代入 C 的方程：

$$-3a_A = g - (2g - 2a_A) = -g + 2a_A \quad\Longrightarrow\quad a_A = \tfrac{1}{5}g.$$

于是 $r = \frac{2}{5}g$，$\tau = \frac{8}{5}g$，$S = \frac{16}{5}g$，并且

$$a_A = \tfrac{1}{5}g\,(\text{向下}), \qquad a_B = -\tfrac{1}{5}g + \tfrac{2}{5}g = \tfrac{1}{5}g\,(\text{向下}), \qquad a_C = -\tfrac{1}{5}g - \tfrac{2}{5}g = -\tfrac{3}{5}g,$$

所以 C 以 $\frac{3}{5}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ 向上加速。

这些加速度都是常数，而且在 A 被释放的一刻，没有任何量突然改变：A 和 P 由静止开始运动，而 B、C 则保持原有的速率 $\frac{1}{3}gT$。

A 的速率

在第一阶段中 B 移动了 $\frac{1}{6}gT^2$，所以它还要再走

$$0.6\,gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{3}{5}gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{13}{30}gT^2$$

。在第二阶段中，B 开始时的向下速度为 $\frac{1}{3}gT$，向下加速度为 $\frac{1}{5}g$，所以它的速度一直为正，所走的距离等于它的位移。若这段路程需时 t，则由 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ 得

$$\tfrac{1}{3}gT\,t + \tfrac{1}{10}gt^2 = \tfrac{13}{30}gT^2.$$

设 $t = kT$，并把全式乘以 $30/(gT^2)$：

$$3k^2 + 10k - 13 = 0 \quad\Longrightarrow\quad (k-1)(3k+13) = 0.$$

由于 $t > 0$，故 $k = 1$：第二阶段恰好历时 T 秒。A 在这个阶段由静止开始，加速度为 $\frac{1}{5}g$，所以它这时的速率为

$$v_A = \tfrac{1}{5}g \cdot T = \tfrac{gT}{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

验算

- 把求得的数值代入，每条运动方程都成立：对 A 而言，$4\cdot\frac{1}{5}g = 4g - \frac{16}{5}g$；对 C 而言，$-\frac{3}{5}g = g - \frac{8}{5}g$。
- 一个独立的验算：两条绳迫使 $y_C = \text{常数} - 2y_A - y_B$（各位置均以向下量度），而以两个自由坐标 y_A、y_B 运用能量方法，同样得出 $a_A = a_B = \frac{1}{5}g$，$a_C = -\frac{3}{5}g$。
- 取 $g = 9.8$，$T = 1.7$，以数值方法逐步计算运动，B 在 $t = 3.400$（即 $2T$）时走了 $0.6gT^2$，此时 A 的速率为 $3.332 = gT/5$。
- 总重量为 $7g$，但固定滑轮只承受 $2S = \frac{32}{5}g$，小于 $7g$，所以在第二阶段中，系统的质心（centre of mass）向下加速，理应如此。

常见错误

- 在第二阶段仍把 P 当作固定，并对 B 和 C 沿用 $\pm\frac{1}{3}g$。
- 忘记了轻滑轮有 $S = 2\tau$，或者为滑轮加上质量项。
- 把整段 $0.6gT^2$ 当作第二阶段的距离，而没有减去已经走过的 $\frac{1}{6}gT^2$。

STEP 之外

像第二项验算那样，选取能自动满足绳的约束条件的位置坐标，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点：把动能（kinetic energy）和势能（potential energy）用自由坐标表示出来，运动方程便随之而得，完全不必理会张力。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）对滑轮这类受约束系统有细致的处理，是很好的下一步读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。