详细解答

STEP II 2000，第 1 题

纯数学 · 埃及分数

> **STEP II 2000，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q1

关键思路

两个例子有共同的规律：第一个分母比 N 大一，第二个分母则是 N 与它的乘积。至于唯一性的部分，先去分母，再“配成矩形”，便可把 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{N}$ 化为两个整数之积等于 N^2 的形式。质数（prime）的平方只有极少数的因数分解（factorisation）方式，所以 a 和 b 的可能取值寥寥可数，我们只需逐一列出即可。

解答

一般结果

在 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ 中，分母分别是 $N+1$ 和 $N(N+1)$（因为 $6=2\times 3$ 而 $12=3\times 4$）。于是我们猜想

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}.$$

要证明这条式，只需把右边通分：

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}=\frac{N+1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}.$$

两个分母都是大于 1 的整数，所以两项都是单位分数（unit fraction）。又因为当 $N>1$ 时 $N(N+1)>N+1$，所以两者相异。因此，每个单位分数都可以写成两个相异单位分数之和。

N 为质数时的唯一性

把 $\frac{1}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 两边乘以 abN，得 $ab = Nb + Na$，即

$$ab - Na - Nb = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ab - Na - Nb + N^2 = N^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-N)(b-N) = N^2.$$

每一步都可以逆推（因为 a、b、N 均不为零），所以 $(*)$ 的解恰好就是 $(a-N)(b-N) = N^2$ 的解。

> **想一想** $a - N$ 和 $b - N$ 有没有可能同时为负数?

不可能。由于 $\frac{1}{b} > 0$，我们有 $\frac{1}{a} < \frac{1}{N}$，所以 $a > N$；同理 $b > N$。因此 $a - N$ 和 $b - N$ 是乘积为 N^2 的正整数。（这一点值得留意：若没有这一步，$(-1, -N^2)$ 这一对便会是另一个需要排除的因数分解。）

现在设 $N = p$ 为质数。p^2 的正因数（divisor）只有 1、p 和 p^2，所以 $(a-p, b-p)$ 这一对必定是以下其中之一：

$$(1,\, p^2), \qquad (p,\, p), \qquad (p^2,\, 1).$$

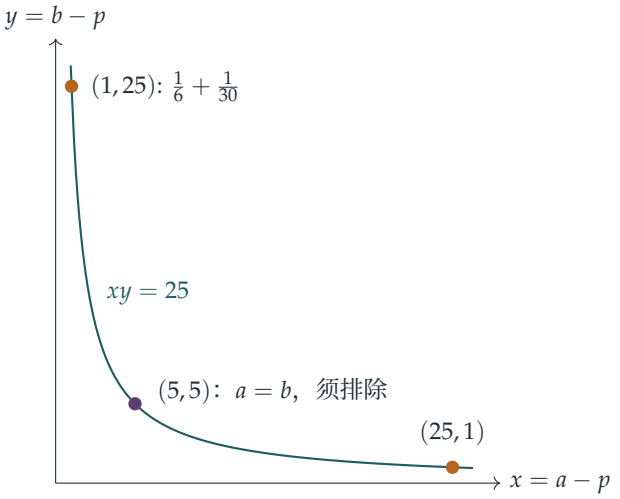
- (p, p) 给出 $a = b = 2p$，即 $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$：两个单位分数并不相异，所以这个情况须排除。
- $(1, p^2)$ 给出 $a = p + 1$，$b = p^2 + p = p(p+1)$，这正是上面找到的表示式；$(p^2, 1)$ 则是同一对数，只是次序对调。

所以，若不计两项的次序，唯一的写法是

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)},$$

这正是所要证明的。

下图说明了个中原因：这些解就是双曲线（hyperbola）$xy = p^2$ 在正象限内的格点（lattice point），其中 $x = a - p$，$y = b - p$。图中 $p = 5$。



形如 $2/N$ 的分数

现在假设 $\frac{2}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$，其中 $N = p$ 是奇质数。两边乘以 abp，得 $2ab = pa + pb$。要配成矩形，我们先乘以 2：

$$4ab - 2pa - 2pb = 0 \iff 4ab - 2pa - 2pb + p^2 = p^2 \iff (2a - p)(2b - p) = p^2.$$

> ? **想一想** 为甚么要先乘以 2 才作因式分解?

若直接把 $2ab - pa - pb$ 因式分解，便会出现 $(a - \frac{p}{2})$ 这类项，而它们并不是整数。乘以 2 之后，一切都保持为整数，所以因式 $2a - p$ 和 $2b - p$ 都是整数，我们便可以运用整除性（divisibility）。

与之前一样，$\frac{1}{a} < \frac{2}{p}$，所以 $2a > p$，即 $2a - p > 0$；同理 $2b - p > 0$。p^2 的正因数是 1、p、p^2，所以 $(2a - p, 2b - p)$ 是以下其中之一：

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

- (p, p) 给出 $a = b = p$，即 $\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$：两者并不相异，须排除。
- $(1, p^2)$ 给出

  $$a = \frac{p+1}{2}, \qquad b = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$

  由于 p 是奇数，$p + 1$ 是偶数，所以两者都是整数。由于 $p \geq 3$，$a \geq 2$，所以两者都大于 1；而 $b = pa > a$，所以两者相异。$(p^2, 1)$ 的情况是同一对数，只是次序对调。

直接验证：

$$\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p(p+1)} = \frac{2(p+1)}{p(p+1)} = \frac{2}{p}.$$

所以 $\frac{2}{p}$ 可以写成两个相异单位分数之和，而且（不计次序）唯一的写法是

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}p(p+1)},$$

这就证明了最后的结果。

验算

- $p=3$：$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$；$p=5$：$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$；$p=7$：$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$。
- 以电脑搜索所有 $N < 300$，结果发现：对每个质数 N，$\frac{1}{N}$ 恰好有一种表示法；对每个奇质数 N，$\frac{2}{N}$ 也恰好有一种表示法，与上面的公式吻合。
- 质数这个条件确实重要：$N=6$ 有四种表示法，例如 $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$，每一种对应一个因数分解 $36 = 1\times 36 = 2\times 18 = 3\times 12 = 4\times 9$（$6\times 6$ 这一对则给出 $a=b$）。
- 为甚么要 $p>2$：当 $p=2$ 时，$\frac{2}{2}=1$ 不能写成 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的形式（其中 $a,b>1$ 且相异），而 $(p+1)/2$ 也确实不是整数。

常见错误

- 忘记证明 $a-N>0$ 和 $b-N>0$，因而忽略了 N^2 的负因数分解。
- 没有排除 $N\times N$ 这个因数分解，它给出的是两个相等的单位分数。
- 在 $2/N$ 的情况中，没有检查 $\frac{1}{2}(p+1)$ 是否整数（这正是用到 $p\neq 2$ 的地方）。

STEP 之外

把分数写成相异单位分数之和，可追溯至古埃及人，而“埃及分数”（Egyptian fractions）至今仍有未解决的问题：艾狄胥–施特劳斯猜想（Erdős–Straus conjecture）指出，对所有 $N\geq 2$，$\frac{4}{N}$ 总可以写成三个单位分数之和，但至今无人能够证明。把 $xy - Nx - Ny = 0$ 化为 $(x-N)(y-N) = N^2$ 的技巧，是处理丢番图方程（Diophantine equation）的标准工具，而数算解的个数就变成数算因数的个数。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门书）是进一步认识因数与质数的上佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。