详细解答

STEP I 2000，第 9 题

力学 · 加速参考系中的抛体

> **STEP I 2000，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q9

关键思路

射程是在车厢内量度的，所以应在车厢的参考系（frame of reference）中考虑问题。由于车厢以加速度 a 向北加速，炮弹相对于地板的加速度是向下的 g 加上向南的 a，而向南正是大炮发射的方向。这仍然是一个恒加速度的抛体运动（projectile motion），只是多了一个水平项。只要把射程用 2θ 表示出来，求其最大值便只需一行微分。

解答

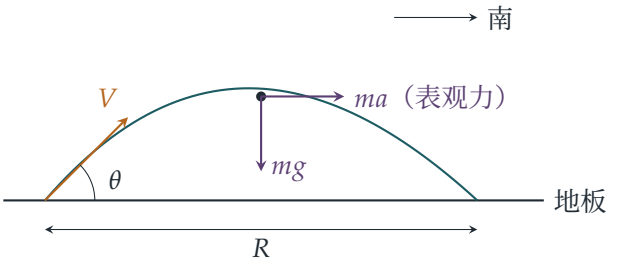
车厢内的射程

把炮弹当作质点（particle），并忽略空气阻力。假设炮弹从地板高度发射并落在地板上，而且车厢够长，炮弹会落在车厢之内。取 x 为水平方向并指向南（沿发射方向），y 为铅垂向上，两者均相对于车厢量度。

在地面参考系中，炮弹的加速度为向下的 g，并没有水平加速度。车厢的加速度为向北的 a。因此炮弹相对于车厢的加速度为

$$\ddot{x} = 0 - (-a) = a, \qquad \ddot{y} = -g.$$

换一个说法，在车厢的参考系中，质量为 m 的炮弹除了受本身的重量作用外，还受到一个向南的表观力（apparent force）ma。



相对于车厢的初速度为向南的 $V\cos\theta$ 和向上的 $V\sin\theta$，所以

$$x = Vt\cos\theta + \tfrac{1}{2}at^2, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

铅垂方向的运动不受 a 影响：炮弹在 $y = 0$ 且 $t > 0$ 时着地，即在 $T = \dfrac{2V\sin\theta}{g}$ 时着地。因此它在车厢内的射程为

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{a}{2}\cdot\frac{4V^2\sin^2\theta}{g^2} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right), \end{aligned}$$

当中用到 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 和 $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$。

求射程的最大值

对 θ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2V^2}{g}\left(\cos 2\theta + \frac{a}{g}\sin 2\theta\right),$$

它在以下情况等于零：

$$\boxed{\tan 2\theta = -\frac{g}{a}.}$$

想一想 正切是负数？这是否表示哪里出了错？

并没有出错。当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，我们有 $0 < 2\theta < \pi$，而 $\tan 2\theta < 0$ 只不过表示 2θ 位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 之内，所以 $\theta > \frac{\pi}{4}$。这是合理的：只要炮弹仍在空中，额外的推动 a 便一直起作用，所以发射角比 45° 稍高一点、换取更长的飞行时间是划算的。若 $a = 0$，便有 $\cos 2\theta = 0$，得出大家熟悉的 $\theta = \frac{\pi}{4}$。

要确认这是最大值，设 $\tan\varphi = \dfrac{a}{g}$，其中 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$。于是

$$\sin 2\theta - \frac{a}{g}\cos 2\theta = \frac{\sin(2\theta - \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a}{g}\right).$$

当 $2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，此式取最大值，即 $2\theta=\frac{\pi}{2}+\varphi$，而这正是 $\tan 2\theta=-g/a$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内的根。所以最佳发射角的准确值为

$$\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\frac{a}{g},$$

又由于 $\cos\varphi=g/\sqrt{g^2+a^2}$，最大射程的准确值为

$$R_{\max}=\frac{V^2}{g}\left(\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{g}+\frac{a}{g}\right)=\frac{V^2}{g^2}\left(a+\sqrt{g^2+a^2}\right).$$

a 很小的情况

当 u 很小时，$\arctan u=u+O(u^3)$。取 $u=a/g$，得

$$\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{g}+O\left(\frac{a^3}{g^3}\right)\right)\approx\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2g},$$

这正是所需的结果。至于射程，$\sqrt{g^2+a^2}=g\sqrt{1+a^2/g^2}=g+O(a^2/g)$，所以

$$R_{\max}=\frac{V^2}{g^2}(a+g+O(a^2/g))\approx\frac{V^2}{g}+\frac{V^2a}{g^2},$$

这就是第二个所需的结果。两个近似式都准确至 a/g 的一阶（first order）；略去的各项为 $(a/g)^2$ 阶或更小。

如果你想继续使用 $\tan 2\theta$, 可设 $2\theta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon$。于是 $\tan 2\theta=-\cot\varepsilon\approx-1/\varepsilon$, 所以 $\varepsilon\approx a/g$。把 $\sin 2\theta=\cos\varepsilon\approx 1$ 和 $\cos 2\theta=-\sin\varepsilon\approx-\varepsilon$ 代入 R, 可得准确至一阶的 $R\approx\frac{V^2}{g}(1+\frac{a}{g})$。

验算

- $a=0$：公式化简为 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $R_{\max}=V^2/g$，即水平地面上的标准结果。
- 量纲（dimensions）：a/g 是无量纲的，而 V^2/g 是长度，正如所料。
- 数值上，取 $V=7$、$g=9.8$ 和 $a=1.3$，在地面参考系中逐步计算运动，再减去车厢的位置，所得结果与 R 的公式吻合（例如在 $\theta=0.7$ 时 $R\approx 5.478$）。对若干个随机选取的 a，以穷举法搜索 θ，发现最大值出现在 $\tan 2\theta=-g/a$ 之处，而 $R_{\max}$ 与 $\frac{V^2}{g^2}(a+\sqrt{g^2+a^2})$ 吻合至 10 位有效数字。当 $a=0.05$ 时，最佳发射角的准确值 $0.787949\ldots$ 与 $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2g}$ 吻合至小数点后七位。

常见错误

- 弄错 a 的正负号。车厢加速的方向与炮弹的发射方向相反，所以相对于地板，炮弹向南的速率会增加：$\frac{1}{2}aT^2$ 这一项是加上去的，而不是减去的。

- 量度了地面上的射程，而不是车厢内的射程。题目问的是沿车厢地板的距离。
- 用计算机求得 $2\theta = \arctan(-g/a)$，这样会得出一个负的角。正确的根位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 之内。

STEP 之外

在加速参考系中考虑问题，并加上一个表观力 $-m\mathbf{a}$，是*假想力*（fictitious force）最简单的例子。旋转参考系也以同样的方式引入离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）。在本题中，表观力只不过令“等效重力”倾斜，使其大小变为 $\sqrt{g^2+a^2}$，这是理解答案中为何出现 $\sqrt{g^2+a^2}$ 的一种方法。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对非惯性参考系（non-inertial frame）有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。