详细解答

STEP I 2000，第 8 题

纯数学 · 绝对值的积分

STEP I 2000，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q8

关键思路

处理积分（integral）内的绝对值（modulus）符号，方法是找出符号内的式子在何处变号。在相邻两个变号点之间的每个区间上，$|f|$ 不是 f 就是 $-f$，所以我们在这些点把积分范围拆开，然后对普通的函数逐段积分。真正要花工夫的，是找出零点的位置：xe^x 可凭观察得出，三次式要靠因式分解（factorising），而 $\sin x + \cos x$ 则要写成单一个正弦波。

解答

第一个积分

由于对所有 x 都有 $e^x > 0$，xe^x 的正负号与 x 的正负号相同。因此在 $[-1,0]$ 上有 $xe^x \le 0$ 及 $|xe^x| = -xe^x$，而在 $[0,1]$ 上则有 $xe^x \ge 0$ 及 $|xe^x| = xe^x$。在 0 处把积分范围拆开，

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-xe^x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} xe^x\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} xe^x\,\mathrm{d}x,$$

这正是所需的恒等式。

要计算其值，可用分部积分法（integration by parts），取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = e^x$：

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + c.$$

因此

$$\int_{-1}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x = \left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0} = -1 - (-2e^{-1}) = \frac{2}{e} - 1,$$

$$\int_{0}^{1} xe^x\,\mathrm{d}x = \left[(x-1)e^x\right]_{0}^{1} = 0 - (-1) = 1.$$

其中第一个积分是负数（这是必然的，因为被积函数（integrand）在该区间上是负的），于是

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,\mathrm{d}x = \left(1-\frac{2}{e}\right)+1 = 2-\frac{2}{e}.$$

第 (i) 部分

设 $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$。把各项分组，

$$p(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x-2).$$

在 $[0,4]$ 内的零点只有 $x=1$ 和 $x=2$。首项系数为正、且有单根（simple root）$-1, 1, 2$ 的三次式，在 -1 与 1 之间为正，在 1 与 2 之间为负，在 2 之后为正。所以

$$|p(x)| = \begin{cases} p(x), & 0 \le x \le 1, \\ -p(x), & 1 \le x \le 2, \\ p(x), & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

取原函数（antiderivative）

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x,$$

则有

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + 2 = \tfrac{13}{12},$$
$$F(2) = 4 - \tfrac{16}{3} - 2 + 4 = \tfrac{2}{3}, \qquad F(4) = 64 - \tfrac{128}{3} - 8 + 8 = \tfrac{64}{3}.$$

? **想一想** 为甚么不能直接计算 $F(4) - F(0)$，然后取其绝对值?

因为绝对值必须作用在被积函数上，而不是作用在答案上。在 $[1,2]$ 上这个三次式是负的，$F(4) - F(0)$ 会把那块面积减去，而不是加上。所以我们把三段分开处理：

$$\begin{aligned} \int_0^4 |p(x)|\,\mathrm{d}x &= (F(1)-F(0)) - (F(2)-F(1)) + (F(4)-F(2)) \\ &= \tfrac{13}{12} - (\tfrac{2}{3} - \tfrac{13}{12}) + (\tfrac{64}{3} - \tfrac{2}{3}) \\ &= \tfrac{13}{12} + \tfrac{5}{12} + \tfrac{62}{3} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{62}{3} = \frac{133}{6}. \end{aligned}$$

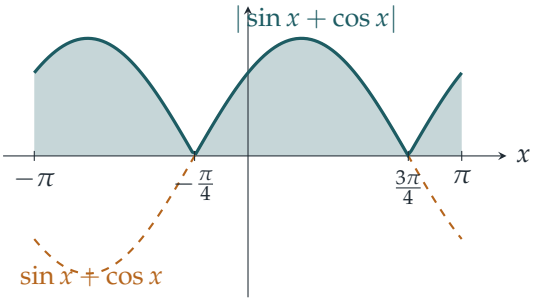
每一项都是正数，这是应有的结果：$\frac{13}{12}$、$\frac{5}{12}$ 和 $\frac{62}{3}$ 就是三块各自的面积。（作为比较，$F(4) - F(0) = \frac{64}{3}$，比正确答案少了 $2 \times \frac{5}{12}$。）

第 (ii) 部分

利用 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$，

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}).$$

在 $[-\pi,\pi]$ 内，此式在 $x=-\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处为零。它在 $[-\pi,-\frac{\pi}{4}]$ 和 $[\frac{3\pi}{4},\pi]$ 上为负，在两者之间为正。



我们可以像之前那样拆成三段，但其实有一条更简洁的路。作代换（substitution）$u=x+\frac{\pi}{4}$：

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4}|\sin u|\,\mathrm{d}u.$$

函数 $|\sin u|$ 的周期（period）为 π，而新的积分范围长度为 2π，所以刚好涵盖两个周期。周期函数在整数个周期上的积分，与起点在哪里无关，所以

$$\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4}|\sin u|\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\times 2\int_{0}^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\times 2\times 2=4\sqrt{2}.$$

如果你较喜欢直接拆开来做，$G(x)=\sin x-\cos x$ 是 $\sin x+\cos x$ 的一个原函数，其中 $G(-\pi)=1$、$G(-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$、$G(\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}$ 及 $G(\pi)=1$。三块面积分别是 $1+\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}-1$，加起来是 $4\sqrt{2}$。

验算

- 在每一段上（被积函数在该段上是光滑的）使用辛普森法则（Simpson's rule），第一个积分得 1.264241…，与 $2-2/\mathrm{e}\approx 1.264241$ 吻合。
- 对于 (i)，数值积分（numerical integration）得 22.16667，与 $\frac{133}{6}$ 吻合。它也比 $F(4)-F(0)=\frac{64}{3}\approx 21.33$ 略大，这是必然的，因为绝对值把一小块负面积变成了正面积。
- 对于 (ii)，数值积分得 5.656854，与 $4\sqrt{2}$ 吻合。再作一个合理性检查：$|\sin x+\cos x|$ 的形状与 $\sqrt{2}|\sin x|$ 相同，后者的平均值为 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$，而 $2\pi\times\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=4\sqrt{2}$。

常见错误

- 直接跨过变号点积分，到最后才取绝对值。这样会把每一个负的区域都少算了。

- 在 (i) 中遗漏了 $x = 1$ 这个根。务必彻底因式分解，或至少用因式定理（factor theorem）检查细小的整数根。
- 计算 $\left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0}$ 时弄错正负号：在 $x = -1$ 处的值是 $-2\mathrm{e}^{-1}$，所以减去它即是加上 $2/\mathrm{e}$。

STEP 之外

积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 是曲线与坐标轴之间的总面积。到了大学，它会以 f 的 L^1 范数（norm）的身分再次出现，这是量度一个函数的大小、以及两个函数之间距离的一种方法。证明只要 f 可积（integrable）则 $|f|$ 亦可积，以及证明 $\left|\int f\right| \le \int |f|$，是实分析（real analysis）入门阶段的标准习题。Abbott 的 *Understanding Analysis*（实分析入门教材）对黎曼积分（Riemann integral）的建构相当严谨，足以证明这两个结果。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。