详细解答

STEP I 2000，第 7 题

纯数学 · 导数的界限

> **STEP I 2000，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q7

关键思路

求导之后，条件 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ 就变成 “a 不小于某个关于 x 的函数”。因此一切取决于该函数的最大值。这个函数只与 x^2 有关，经代换（substitution）$u = 1 + x^2$ 后，它成为 $1/u$ 的二次式。再用配方法（completing the square）便可求得最大值，并清楚看出最大值在何处取得。

解答

导数

由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

所以

$$\mathrm{f}'(x) = a - g(x), \qquad \text{其中} g(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

因此，$\mathrm{f}'(x) \geq 0$ 对所有 x 成立，当且仅当 $a \geq g(x)$ 对所有 x 成立。我们需要求出 g 的最大值。

g 的最大值

设 $u = 1 + x^2$，则 $u \geq 1$ 且 $x^2 = u - 1$。于是

$$g = \frac{(u-1)(u+2)}{u^2} = \frac{u^2 + u - 2}{u^2} = 1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}.$$

想一想 为甚么用 $1/u$ 而不是 u 来表示这个式子会较好?

以 $s = 1/u$ 表示，$g = 1 + s - 2s^2$，这只是一个二次式，而二次式的最大值可由配方法求得，无须用到微积分:

$$1 + s - 2s^2 = \frac{9}{8} - 2\left(s - \frac{1}{4}\right)^2.$$

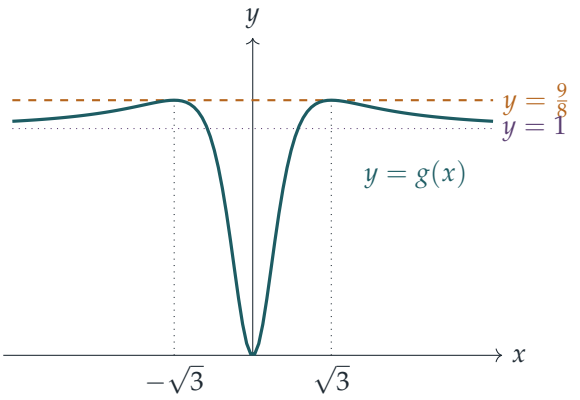
由于平方永不为负，对每个 x 都有 $g \le \frac{9}{8}$，等号仅在 $s = \frac{1}{4}$ 时成立，即 $u = 4$，$x = \pm\sqrt{3}$。把结果写回 x 的形式（利用 $s - \frac{1}{4} = \frac{3-x^2}{4(1+x^2)}$），便得到导数的一个简洁恒等式（identity）:

$$\mathrm{f}'(x) = \left(a - \frac{9}{8}\right) + \frac{(3-x^2)^2}{8(1+x^2)^2}.$$

结论

若 $a \ge \frac{9}{8}$, 第一个括号非负, 而第二项是一个平方除以正数, 所以同样非负。因此 $\mathrm{f}'(x) \ge 0$ 对所有 x 成立，正如所求。

常数 $\frac{9}{8}$ 也是最佳的：若 $a < \frac{9}{8}$，则 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = a - \frac{9}{8} < 0$。当 $a = \frac{9}{8}$ 时，f' 只在 $x = \pm\sqrt{3}$ 处为零，所以 f 仍然是严格递增（strictly increasing）的，并有两个驻拐点（stationary points of inflection）。



g 的图像由 0 开始上升，越过其极限（limit）1，在 $x = \pm\sqrt{3}$ 时达到顶点 $\frac{9}{8}$，然后回落并趋向 1。导数 $\mathrm{f}'(x)$ 就是直线 $y = a$ 高出这条曲线的高度。

验算

▶ 在 $x = \sqrt{3}$ 处: $g = \dfrac{3 \cdot 6}{4^2} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$。✓

- 当 $x \to \infty$ 时，$g \to 1 < \frac{9}{8}$。这是合理的，因为当 x 很大时 $\frac{x^3}{1+x^2}$ 的表现与 x 相若，所以其斜率趋向 1。
- 数值上，取 $a = \frac{9}{8}$，在 $[-100, 100]$ 上以步长 0.001 的网格计算，$\mathrm{f}'(x)$ 的最小值约为 2×10^{-10}（基本上是 0，在 $x \approx \pm\sqrt{3}$ 处）。取 $a = 1.1$，则 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = -0.025 < 0$。

常见错误

- 把 g 在无穷远处的极限 1 当作它的最大值。曲线会越过这个极限，所以答案是 $\frac{9}{8}$ 而不是 1。
- 直接对 g 求导，结果迷失在繁复的代数运算之中。代换 $s = 1/(1+x^2)$ 可把问题化为一行就能完成的配方。

STEP 之外

在这里，一个“对所有 x”的命题被化为求上确界（supremum）的问题：$\mathrm{f}' \geq 0$ 处处成立，当且仅当 $a \geq \sup g$。g 在无穷远处有极限，却在有限的点上取得最大值，这正好提醒我们：极限不一定是界（bound）。在分析学（analysis）中，你会证明导数非负的函数是递增的（借助中值定理（Mean Value Theorem）），这就是为甚么这道题其实是在问 f 是否单调（monotonic）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对这些概念有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。