详细解答

STEP I 2000，第 6 题

纯数学 · 直线所围成的区域

> **STEP I 2000，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q6

关键思路

一个关于 x 和 y 的二次式，若能因式分解（factorise）为两个一次因式，所描述的就是一对直线。两个因式的积为正，当且仅当两个因式同号；两者异号时积为负。因此每个不等式（inequality）所选出的，都是两条相交直线之间一对相对的“楔形”区域。只要把两个区域画在同一组坐标轴上，要找一个公共点，一看便知。

解答

第一个因式分解与区域

展开右边，

$$\begin{aligned}(x-y+2)(x+y-1) &= x^2+xy-x-xy-y^2+y+2x+2y-2\\ &= x^2-y^2+x+3y-2,\end{aligned}$$

正如所求。所以把第一个不等式两边同时减去 2 后，得

$$(x-y+2)(x+y-1)>0.$$

边界由两条直线组成：

$$L_1:\ y=x+2, \qquad L_2:\ y=1-x,$$

它们的斜率（gradient）分别为 1 和 -1，并在 $x+2=1-x$ 处相交，即交于 $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$。

两个因式同号时，积为正：

- 两者皆正：$y<x+2$ 且 $y>1-x$，即在 L_1 之下、L_2 之上。这是交点*右方*的楔形（例如它包含 $(5,0)$）；

- 两者皆负：$y > x+2$ 且 $y < 1-x$，即在 L_1 之上、L_2 之下。这是交点*左方*的楔形（它包含 $(-5,0)$）。

所以这个区域就是直线 $y = x+2$ 与 $y = 1-x$ 之间左右相对的一对楔形，而直线本身并不包括在内（在直线上积为 0，而非 > 0）。简单测试一下：在原点，该式的值为 $-2 < 0$，而原点位于下方的楔形内，这个楔形确实应被排除。

第二个区域

想一想 我们怎样知道这一个也能因式分解？它的因式又应该是甚么样子？

由二次项 $x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y)$ 可以想到尝试

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = (x+2y+a)(x-2y+b).$$

右边展开后是 $x^2 - 4y^2 + (a+b)x + (2b-2a)y + ab$。比较系数（coefficient）得 $a+b=3$ 和 $b-a=-1$，所以 $a=2$，$b=1$，而常数项 $ab=2$ 亦同样吻合。因此，把第二个不等式两边同时加上 2，得

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y < -2 \iff (x+2y+2)(x-2y+1) < 0.$$

边界直线为

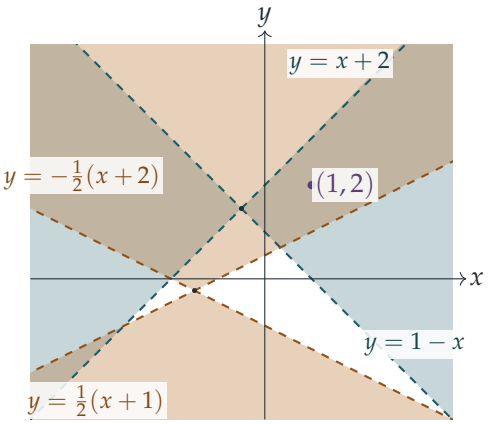
$$L_3:\ y = -\tfrac{1}{2}(x+2), \qquad L_4:\ y = \tfrac{1}{2}(x+1),$$

斜率分别为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$，并在 $-x-2 = x+1$ 处相交，即交于 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$。

这次我们需要两个因式*异号*：

- $x+2y+2 > 0$ 且 $x-2y+1 < 0$：$y > -\frac{1}{2}(x+2)$ 且 $y > \frac{1}{2}(x+1)$，即在两条直线之上。这是*上方*的楔形（它包含 $(0,5)$）；
- $x+2y+2 < 0$ 且 $x-2y+1 > 0$：在两条直线之下。这是*下方*的楔形（它包含 $(0,-5)$）。

所以第二个区域就是直线 L_3 与 L_4 之间上下相对的一对楔形，边界同样不包括在内。



在草图中，第一个区域以蓝绿色涂上阴影（左右两个楔形），第二个区域则用琥珀色（上下两个楔形），所以颜色较深的重叠部分就是两个不等式同时成立之处；虚线并不包括在内。

同时位于两个区域的一点

这两对楔形必定有重叠：右边的蓝绿色楔形在斜率为 ± 1 的两条直线之间向右张开，而上方的琥珀色楔形则包含了位于斜率为 $\pm\frac{1}{2}$ 的两条较平缓直线之上的所有点。当 $x > -\frac{1}{2}$ 时，蓝绿色楔形的上边 $y = x + 2$ 比直线 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ 上升得更快，所以两者之间留有空间。

例如取 $(x, y) = (1, 2)$。则

$$x^2 - y^2 + x + 3y = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 > 2$$

且

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = 1 - 16 + 3 - 4 = -16 < -2,$$

所以 $(1, 2)$ 同时满足两个不等式。（用因式核对：$(x - y + 2)(x + y - 1) = 1 \cdot 2 > 0$ 且 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot (-2) < 0$。）

验算

- 每个因式分解都可以随意取一点来核对：在 $(3, 1)$，$x^2 - y^2 + x + 3y - 2 = 12$ 而 $(x - y + 2)(x + y - 1) = 4 \cdot 3 = 12$；在同一点，$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = 14$ 而 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot 2 = 14$。
- 在每个楔形内各测试一点，例如 $(0, -5)$ 给出 $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = -90 < -2$，确认下方的琥珀色楔形属于第二个区域。

- 在 $[-10,10]^2$ 内随机抽取 200 000 个点作数值检验，结果显示不等式与上述楔形的描述完全一致，没有任何出入。

常见错误

- 把错误的一对楔形涂上阴影。务必测试一点（原点最方便），而不要单靠“之上”和“之下”来判断。
- 把常数移项时忘记了 -2 和 $+2$：第一个不等式是 $(x-y+2)(x+y-1)>0$，第二个是 $(x+2y+2)(x-2y+1)<0$。
- 把边界直线画成实线：这些不等式是严格不等式，所以直线并不包括在内。

STEP 之外

一个二元二次式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 定义了一条圆锥曲线（conic）；当它能分解为两个一次因式时，这条圆锥曲线是退化（degenerate）的，即一对直线，而这种情况恰好在由各系数构成的某个 3×3 行列式（determinant）等于零时出现。二次型（quadratic form）的正负号分布（这里的 x^2-y^2 和 x^2-4y^2 都是不定的（indefinite）），会在大学一年级的线性代数（linear algebra）中，通过对称矩阵（symmetric matrix）及其特征值（eigenvalue）来研究。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是了解这个课题的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。