详细解答

STEP I 2000，第 5 题

纯数学 · 三维向量

STEP I 2000，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q5

关键思路

一切都发生在斜面上，所以先在这个平面内设置两个互相垂直的单位向量（unit vector）：一个沿最大斜率线（line of greatest slope）指向正上方，另一个是水平的。Arthur 和 Bertha 的位置就是这两个向量的简单组合，而和差化积公式（sum-to-product formulae）可以立刻把两者之差整理好。至于与铅垂线所成的角，我们只需要知道平面内这两个方向各自与铅垂方向的关系，θ 正是在这里出现的。

解答

建立设置

设 $\mathbf{e}$ 为沿着通过 O 的最陡直线指向上方的单位向量，并设 $\mathbf{f}$ 为平面内与 $\mathbf{e}$ 垂直、指向两人所在一侧的单位向量。由于 $\mathbf{f}$ 与最大斜率线垂直，所以它是水平的。设 $\mathbf{k}$ 为铅垂向上的单位向量。那么

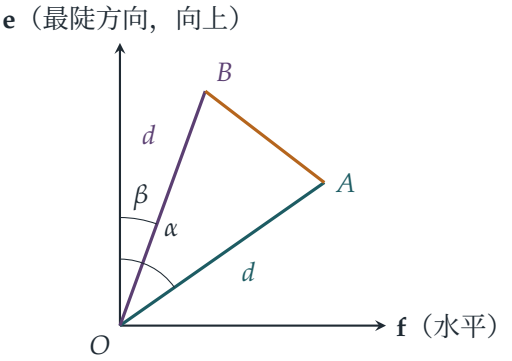
$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}=\sin\theta,\qquad \mathbf{f}\cdot\mathbf{k}=0,\qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=0.$$

（第一式成立，是因为 $\mathbf{e}$ 与水平面成角 θ，因而与 $\mathbf{k}$ 成角 $\frac{\pi}{2}-\theta$。）

两人步行的速率相同，所以当 Arthur 走了距离 d 时，Bertha 也走了同样的距离。他们相对于 O 的位置是

$$\mathbf{a}=d(\cos\alpha\,\mathbf{e}+\sin\alpha\,\mathbf{f}),\qquad \mathbf{b}=d(\cos\beta\,\mathbf{e}+\sin\beta\,\mathbf{f}).$$

两人都在最陡直线的同一侧向上走，即 $0\le\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$。



此图画的是斜面本身，即正对着斜面看过去的样子。

两人之间的距离

利用和差化积公式，

$$\begin{aligned}\mathbf{a}-\mathbf{b} &= d[(\cos\alpha-\cos\beta)\,\mathbf{e}+(\sin\alpha-\sin\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= d[-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{e}+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= 2d\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,[-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}].\end{aligned}$$

记 $s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。向量 $\mathbf{u}=-\sin s\,\mathbf{e}+\cos s\,\mathbf{f}$ 是单位向量，因为 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{f}$ 是互相垂直的单位向量，而且 $\sin^2 s+\cos^2 s=1$。因此

$$AB=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2d\,|\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)|,$$

正是所求。（从几何上看：OAB 是等腰三角形（isosceles triangle），两条等边长 d，顶角为 $|\alpha-\beta|$；由 O 作垂线，可得相同的答案。）

与铅垂线所成的角

当 $\alpha\neq\beta$ 时，由于 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2}$，我们有 $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\neq 0$，所以 $A\neq B$，直线 AB 有明确定义。上面的计算显示，这条直线平行于单位向量 $\mathbf{u}$，或者等价地说，平行于 $\mathbf{v}=-\mathbf{u}=\sin s\,\mathbf{e}-\cos s\,\mathbf{f}$。

? **想一想** 一条直线有两个方向。我们应该拿哪一个来与铅垂方向比较?

直线与铅垂线所成的角是指锐角（或直角），所以我们取直线上指向上方的那个方向，或者至少是不指向下方的那个方向。现在

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=\sin s\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k})-\cos s\,(\mathbf{f}\cdot\mathbf{k})=\sin\theta\sin s.$$

由于 $0 \le s < \frac{\pi}{2}$ 及 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，这个值非负，所以 $\mathbf{v}$ 就是向上的方向。因为 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{k}$ 都是单位向量，两者之间的夹角 ϕ 满足

$$\cos\phi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

这就是所求的结果。留意结果与 d 无关：两人一路走，直线 AB 一路平行于自身移动。

验算

- 若 Arthur 沿水平方向走（$\alpha = \frac{\pi}{2}$，即边界情况），而 Bertha 笔直向上走（$\beta = 0$），则 $AB = 2d\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,d$，这正是把毕氏定理（Pythagoras' theorem）用于两条互相垂直、长度同为 d 的路径所得的结果。取 $\theta = 30^\circ$ 及 $d = 1$，用坐标可得 $A = (1,0,0)$，$B = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$，所以由 B 到 A 的铅垂落差是 $\frac{1}{2}$，而两点相距 $\sqrt{2}$：$\cos\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354$，与 $\sin 30^\circ \sin 45^\circ$ 吻合，所以 $\phi \approx 69.3^\circ$。
- 若平面是水平的（$\theta = 0$），则 $\cos\phi = 0$：直线是水平的，理应如此。
- 用电脑在真正的三维坐标中随机选取 10^5 组 θ、α、β、d 作检验，结果与两条公式的误差都在 10^{-12} 以内。

常见错误

- 量度了平面内 AB 与最陡直线之间的角，而不是空间中与铅垂线所成的角；答案中必须出现 θ。
- 忘记加绝对值（modulus）：当 $\beta > \alpha$ 时，$\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 是负数，但距离不会是负数。
- 取了 AB 上向下的方向，得出 $\cos\phi = -\sin\theta\sin s$；直线与铅垂线所成的角永远不会是钝角。

STEP 之外

这里的方法，是选取一组切合问题的标准正交基（orthonormal basis）（先取平面内的两个向量，再找出它们与周围空间中铅垂方向的关系），然后由点积（dot product）读出长度和角度。在大学一年级的线性代数课程中，这会发展成基变换（change of basis）和正交投影（orthogonal projection）的概念：$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$ 就是 $\mathbf{v}$ 在铅垂方向上的投影的长度。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）细致地阐述了这些概念，并配有大量几何内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。