详细解答

STEP I 2000，第 4 题

纯数学 · 积分的界限

STEP I 2000，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q4

关键思路

用初等方法难以直接对 $1/(x^2+1)^4$ 积分，所以题目把它拆成两部分：一部分恰好是某个函数的导数（exact derivative），积分时不费吹灰之力；另一部分是很小的余项。第 (ii) 部分负责建立这个分拆，第 (i) 部分则提供余项的上界。要估计一个积分的界（bound），通常的做法是先估计被积函数（integrand）的界，再乘以区间的长度。

解答

第 (i) 部分

设 $f(x)=\dfrac{x^6}{(x^2+1)^4}$。由于 f 只取决于 x^2，令 $t=x^2$，则 t 与 x 一样在 $[0,1]$ 上取值，并且 $f=g(t)$，其中

$$g(t)=\frac{t^3}{(1+t)^4}.$$

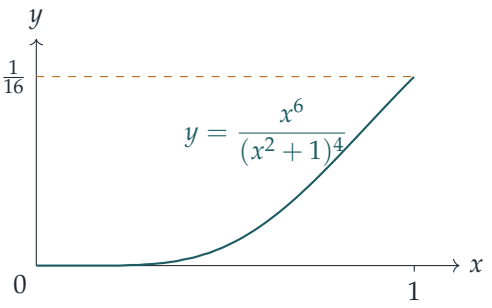
由商法则（quotient rule），

$$g'(t)=\frac{3t^2(1+t)^4-4t^3(1+t)^3}{(1+t)^8}=\frac{t^2(3(1+t)-4t)}{(1+t)^5}=\frac{t^2(3-t)}{(1+t)^5}.$$

当 $0<t\le 1$ 时，每个因子都是正数（特别地，$3-t\ge 2$），所以 $g'(t)>0$，而 g 在 $[0,1]$ 上严格递增（strictly increasing）。因此它的最大值在 $t=1$ 处取得，即 $x=1$：

$$f(1)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16},$$

这正是所要证明的。此外，处处都有 $f(x)\ge 0$，而最小值是 $f(0)=0$。



第 (ii) 部分

用商法则对括号内的式子求导。设 $N = Ax^5 + Bx^3 + Cx$，分母为 $(x^2+1)^3$，其导数为 $6x(x^2+1)^2$，于是可以约去一个因子 $(x^2+1)^2$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{N}{(x^2+1)^3}\right) = \frac{(5Ax^4+3Bx^2+C)(x^2+1) - 6x(Ax^5+Bx^3+Cx)}{(x^2+1)^4}.$$

展开分子，并按 x 的幂次整理：

$$\begin{aligned} &5Ax^6 + 5Ax^4 + 3Bx^4 + 3Bx^2 + Cx^2 + C - 6Ax^6 - 6Bx^4 - 6Cx^2 \\ &\quad = -Ax^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C. \end{aligned}$$

现在各项的分母都是 $(x^2+1)^4$，所以恒等式（identity）对所有 x 成立，当且仅当两边的分子作为多项式相等：

$$(D-A)x^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C = 1.$$

由低次项起逐项比较系数（comparing coefficients）：$C = 1$；然后 $3B = 5C = 5$；然后 $5A = 3B = 5$；最后 $D = A$。所以

$$A = 1, \qquad B = \tfrac{5}{3}, \qquad C = 1, \qquad D = 1.$$

第 (iii) 部分

把第 (ii) 部分的恒等式在 $[0,1]$ 上积分。右边第一项恰好是一个导数，所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} &= \left[\frac{x^5 + \frac{5}{3}x^3 + x}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1+\frac{5}{3}+1}{8} - 0 + J = \frac{11}{24} + J, \end{aligned}$$

其中 $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$。

想一想 怎样才能不用算出 J 而估计它的界?

由第 (i) 部分，J 的被积函数满足 $0 \le f(x) \le \frac{1}{16}$，对 $[0,1]$ 内的每个 x 都成立。把这些不等式在长度为 1 的区间上积分，得

$$0 \le J \le \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}.$$

各项同时加上 $\frac{11}{24}$，

$$\frac{11}{24} \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \le \frac{11}{24} + \frac{1}{16},$$

这就是所求的结果。(其实两个不等式都是严格的，因为 f 连续，而且并非在整个区间上都等于任何一个界，但题目只要求证明 $\le$。)

验算

- 把 $x = 0$ 代入第 (ii) 部分的恒等式：导数项等于 $C = 1$，而含 D 的项为零，得 $1 = 1$。当 $x = 1$ 时，导数的分子是 $-1+0+0+1 = 0$，所以恒等式变成 $\frac{1}{16} = \frac{D}{16}$，与 $D = 1$ 吻合。
- 在数值上，用森逊法则（Simpson's rule）可得 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \approx 0.47460$，稳稳落在 $\frac{11}{24} \approx 0.45833$ 与 $\frac{11}{24} + \frac{1}{16} \approx 0.52083$ 之间。余项 $J \approx 0.01627$ 远小于 $\frac{1}{16}$，因为 f 除了在 $x = 1$ 附近之外都非常小。

常见错误

- 使用商法则时忘记约去公因子 $(x^2+1)^2$，结果分母变成 $(x^2+1)^6$，令比较系数的工作变得一团糟。
- 在第 (i) 部分，只检查 $x = 1$ 是驻点（stationary point）或端点（endpoint）：你必须证明 f 是递增的（或比较所有可能的点），才能断定端点的值是最大值。

STEP 之外

代换(substitution) $x = \tan\theta$ 可把这个积分化为 $\int_0^{\pi/4} \cos^6\theta \, \mathrm{d}\theta$，再用归约公式(reduction formula）便可求出准确值：其值为 $\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}$，与我们的数值估计吻合。把被积函数拆成“一个导数加上一个很小的量”，正是归约公式背后的想法；而通过估计被积函数的界来估计积分的界，则是实分析（real analysis）中最基本的估计方法。Bartle 与 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）对这些估计有严谨细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。