详细解答

STEP I 2000，第 3 题

纯数学 · 阶梯函数的积分

STEP I 2000，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q3

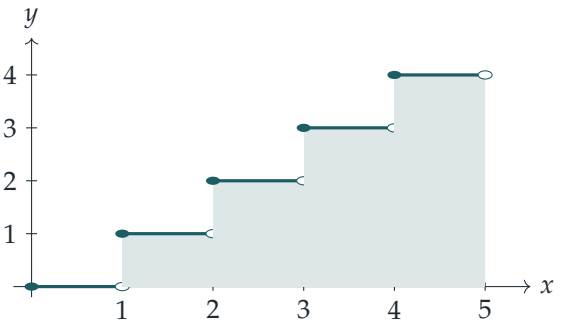
关键思路

任何量的整数部分（integer part）都是一个阶梯函数（step function）：它在各个区间上保持不变，然后向上跳升一。因此这个积分不过是若干个长方形面积之和，真正要做的工夫只是找出每一级由哪里开始、到哪里结束。对于 $[\mathrm{e}^x]$，跳跃发生在 e^x 越过整数之处，即 $x = \ln k$，而由此得出的对数之和恰好可以逐项相消（telescope）。

解答

$y = [x]$ 的图像

在每个区间 $k \le x < k+1$（其中 k 为整数）上，我们有 $[x] = k$。所以图像是由水平线段组成的阶梯，每段长度为 1，左端是实心点（函数取到该值），右端是空心点（函数在该处向上跳升 1）。



积分就是阴影部分的面积，由阔度为 1、高度分别为 $0, 1, 2, 3, 4$ 的长方形组成（函数在

$x = 1, 2, 3, 4$ 这几个单独的点上的取值对面积毫无影响）。因此

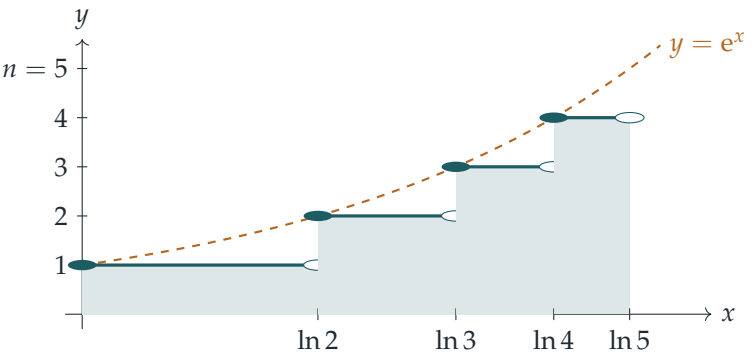
$$\int_0^5 [x]\,\mathrm{d}x = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

$y = [\mathrm{e}^x]$ 的图像

当 $0 \le x < \ln n$ 时，我们有 $1 \le \mathrm{e}^x < n$。由于 e^x 是递增的，

$$[\mathrm{e}^x] = k \iff k \le \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \le x < \ln(k+1),$$

其中 $k = 1, 2, \ldots, n-1$。所以图像仍然是每级高度为 1 的阶梯，但现在各级随着 x 增大而愈来愈短：高度为 k 的那一级阔度为 $\ln(k+1) - \ln k = \ln(1 + \frac{1}{k})$。下面的草图所示为 $n = 5$ 的情况，曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 以虚线表示；阶梯在每一级的左端与曲线相接。



积分

把各长方形的面积相加，即高度 k 乘以阔度 $\ln(k+1) - \ln k$，

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} k(\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k.$$

想一想 怎样才能令这两个和互相抵消？

每个 $\ln j$ 在两个和中都会出现，只是系数不同。在第一个和中代入 $j = k+1$，便可把两者对齐：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k &= \sum_{j=2}^{n}(j-1)\ln j - \sum_{j=1}^{n-1} j\ln j \\ &= (n-1)\ln n + \sum_{j=2}^{n-1}((j-1)-j)\ln j - 1\cdot\ln 1 \\ &= (n-1)\ln n - \sum_{j=2}^{n-1}\ln j.\end{aligned}$$

这里我们从第一个和中抽出 $j = n$ 的一项，并从第二个和中抽出 $j = 1$ 的一项（该项为零，因为 $\ln 1 = 0$）。现在 $\sum_{j=2}^{n-1} \ln j = \ln((n-1)!)$，而 $(n-1)\ln n = n\ln n - \ln n$，所以

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = n\ln n - (\ln n + \ln((n-1)!)) = n\ln n - \ln(n!),$$

正是所求。（当 $n = 1$ 时，积分区间的长度为零，等式两边都是 0。）

图像证明（选读）

阔度为 $\ln n$、高度为 n 的长方形，面积是 $n\ln n$。它位于阶梯上方的部分，由高度为 1 的水平长条组成：在高度 $m-1$ 与 m 之间，其中 $m = 1, \ldots, n$，长条由 $x = 0$ 伸延至 $x = \ln m$，因为 $[\mathrm{e}^x] < m$ 恰好在 $x < \ln m$ 时成立。这长条的面积是 $\ln m$，所以阶梯上方区域的面积为 $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$。从 $n\ln n$ 中减去它，便再次得到所求结果。这就是“改为对 y 而不是对 x 积分”的离散版本。

验算

当 $n = 2$ 时，阶梯只是一个高度为 1、阔度为 $\ln 2$ 的长方形，而公式给出 $2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$。当 $n = 4$ 时，公式给出 $4\ln 4 - \ln 24 \approx 2.3671$；以中点法则（midpoint rule）计算 $\int_0^{\ln 4} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$，结果与之吻合至小数点后五位，而对于直至 8 的每一个 n 亦然。答案还必须小于 $\int_0^{\ln n} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = n - 1$，因为阶梯位于曲线之下：当 $n = 4$ 时，$2.37 < 3$。

常见错误

- 把高度为 k 的那一级的阔度当作 1（照搬第一部分），而不是 $\ln(k+1) - \ln k$。
- 让阶梯由高度 0 开始：在 $0 \le x < \ln n$ 上我们有 $\mathrm{e}^x \ge 1$，所以最低的一级位于高度 1。
- 移动求和指标时出错，漏掉了 $(n-1)\ln n$ 这一项；或者没有留意到它必须与 $\ln((n-1)!)$ 合并，才能得出 $\ln(n!)$。

STEP 之外

由于阶梯位于 $y = \mathrm{e}^x$ 之下，积分小于 $n - 1$，整理后即得 $\ln(n!) > n\ln n - n + 1$。以同样的方法从上方给阶梯定界，便会通往斯特灵公式（Stirling's formula）$\ln(n!) \approx n\ln n - n$，这是分析学、概率论和组合数学中的一个关键估计。由长方形之和转换为长条之和，也是“分部求和法”（summation by parts）的一个例子，它是分部积分法（integration by parts）在离散情况下的近亲。若想为阶梯函数的积分建立严格的基础，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门读本）是下一步的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。