详细解答

STEP I 2000，第 2 题

纯数学 · 二项展开式的系数

STEP I 2000，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/00-s1-q2

关键思路

把两个带分式项的二项式(binomial)直接展开,再逐一寻找相配的幂,过程相当繁琐。较简洁的做法是先把 x 的负数幂抽出来，令每个括号都变成只含 x 的单一种幂（x^6 或 x^2）的多项式(polynomial)。这样一来,凭着因式分解(factorisation)$x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$，便会发现第二个乘积其实就是第一个乘积的化身，所以题目中“由此”（hence）的部分几乎不费工夫。

解答

第一个展开式

从每个括号中抽出 x 的最低次幂，

$$\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)^5=\left(\frac{x^6-1}{x^2}\right)^5=x^{-10}\,(x^6-1)^5,$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^6=x^{-6}\,(x^2-1)^6.$$

因此整个算式等于 $x^{-16}P(x)$，其中

$$P(x)=(x^6-1)^5\,(x^2-1)^6.$$

所以原展开式中 x^n 的系数（coefficient），就是多项式 $P(x)$ 中 x^{n+16} 的系数。

根据二项式定理（binomial theorem），

$$(x^6-1)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(-1)^{5-j}x^{6j},\qquad (x^2-1)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}x^{2k},$$

故此 $P(x)$ 中 x^m 的系数，就是

$$\binom{5}{j}(-1)^{5-j}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}$$

对所有符合 $6j+2k=m$、$0\le j\le 5$、$0\le k\le 6$ 的数对求和的结果。

x^{-12} 的系数。 我们需要 $m=-12+16=4$，即 $6j+2k=4$。由于 $6j\le 4$，必有 $j=0$，所以唯一的数对是 $(j,k)=(0,2)$，得出

$$\binom{5}{0}(-1)^5\cdot\binom{6}{2}(-1)^4=(-1)(15)=-15,$$

正如题目所求。

x^2 的系数。 这次 $m=2+16=18$，所以 $6j+2k=18$，即 $3j+k=9$，而 $k\le 6$。这容许 $j=1,2,3$：

(j,k)	来自 $(x^6-1)^5$	来自 $(x^2-1)^6$	乘积
$(3,0)$	$\binom{5}{3}(-1)^2=10$	$\binom{6}{0}(-1)^6=1$	10
$(2,3)$	$\binom{5}{2}(-1)^3=-10$	$\binom{6}{3}(-1)^3=-20$	200
$(1,6)$	$\binom{5}{1}(-1)^4=5$	$\binom{6}{6}(-1)^0=1$	5

所以 x^2 的系数是 $10+200+5=215$。

> ? **想一想** 为甚么 $j=0$ 或 $j=4$ 不可能对 x^{18} 有贡献?

若 $j=0$，便需要 $k=9$；若 $j=4$，便需要 $k=-3$；两者都不在 $0\le k\le 6$ 的范围内。在这一步很容易漏掉某个数对（或者凭空多出一个），所以有系统地列出所有可能情况是值得的。

第二个展开式

> ? **想一想** x^4+x^2+1 与第一部分有甚么关系?

把 x^6-1 看成以 x^2 表示的立方差（difference of cubes）时，它就是另一个因式：

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1).$$

把 $(x^2-1)^{11}$ 拆成 $(x^2-1)^5(x^2-1)^6$，

$$(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5=[(x^2-1)(x^4+x^2+1)]^5(x^2-1)^6=(x^6-1)^5(x^2-1)^6=P(x).$$

所以第二个展开式正正就是 $P(x)$，即第一个展开式乘以 x^{16}。

x^4 的系数。 这就是 $P(x)$ 中 x^4 的系数，我们在上面已经求得（它对应第一个展开式中的 x^{-12}）。答案是 -15。

x^{38} 的系数。 这对应 $6j+2k=38$，即 $3j+k=19$，而 $j\le 5$、$k\le 6$。由于 $k\le 6$，我们需要 $3j\ge 13$，所以 $j=5$、$k=4$，得出

$$\binom{5}{5}(-1)^0\cdot\binom{6}{4}(-1)^2=15.$$

所以 x^{38} 的系数是 15。

其实有一个巧妙的方法，不用计数也能看出这个结果。P 的次数（degree）是 $30+12=42$，而把 x 换成 $1/x$ 可得

$$x^{42}P(1/x)=(1-x^6)^5(1-x^2)^6=(-1)^{11}P(x)=-P(x).$$

比较系数可知，P 中 x^{42-m} 的系数等于 x^m 的系数的负数。取 $m=4$，x^{38} 的系数就是 $-(-15)=15$，与上面的结果吻合。

验算

- 把 $x=1$ 代入 $P(x)$：其值为零，所以 P 的所有系数之和是 0。如果你把它完全展开，这是一个快捷的合理性检查。
- 我们用电脑把两个乘积精确地乘开（以系数列表的形式）。在第一个乘积中，x^{-12} 的系数是 -15，x^2 的系数是 215；在第二个乘积中，x^4 的系数是 -15，x^{38} 的系数是 15。我们亦确认了第二个乘积的次数是 42，并且等于第一个乘积乘以 x^{16}。
- 把随机选取的有理数值代入原式中的 x，所得结果与计算出来的展开式完全吻合。

常见错误

- 正负号出错：若选取的幂是 x^{6j} 和 x^{2k}，该项的正负号是 $(-1)^{5-j}(-1)^{6-k}=-(-1)^{j+k}$，而不是 $(-1)^{j+k}$。用错了的话，每个答案的正负号都会颠倒。
- 计算 x^2 的系数时漏掉 $(1,6)$ 或 $(3,0)$ 这两项，结果得出 200 或 205。
- 没有留意到因式分解，直接展开 $(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5$：这样做是可行的，但冗长而且容易出错。

STEP 之外

把多个和式的乘积写成单一个和式，再从中抽出 x 的某一个幂，正是*生成函数*（generating function）背后的想法。乘积中的某个系数，数算的是由各部分凑出某个总数的方法数目，与我们在上面计数数对 (j,k) 的做法如出一辙。对称关系 $x^{42}P(1/x) = -P(x)$ 说明 P 是一个（反）*回文*多项式（(anti)palindromic polynomial）；这类多项式会在分圆多项式（cyclotomic polynomial）和单位根（roots of unity）的研究中出现，而 $x^6 - 1$ 正是其中最初步的例子。想做更多同类风格的题目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 是很好的下一步；而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 则对多项式的因式分解有完整而严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。