详细解答

STEP I 2000，第 14 题

概率与统计 • 均匀分布的矩

> **STEP I 2000，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q14

关键思路

这里的一切都是均匀分布（uniform distribution）的矩（moment），而 X 在 $[-1,1]$ 上的矩很容易计算：奇数阶的矩因对称性而等于零，偶数阶的矩则为 $1/(k+1)$。至于 $Z=Y-X$，我们根本不需要知道 Z 的分布。把 $(Y-X)^2$ 和 $(Y-X)^4$ 按二项式展开，再利用独立性（independence），每个期望值（expectation）都化为我们已知的矩的乘积。

解答

X 的矩

X 在 $[-1,1]$ 上的密度（density）为 $\frac{1}{2}$，所以对非负整数 k，

$$\mathrm{E}(X^k)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^k\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & k\text{ 为奇数（被积函数是奇函数），}\\ \dfrac{1}{k+1}, & k\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

特别地，$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(X^3)=0$，$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{3}$，而 $\mathrm{E}(X^4)=\frac{1}{5}$。因此

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{3},\qquad \mathrm{Var}(X^2)=\mathrm{E}(X^4)-(\mathrm{E}(X^2))^2=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}.$$

Y 的分布相同，所以它的矩也相同。

Z^2 的平均值

展开得 $Z^2=Y^2-2XY+X^2$。由于 X 和 Y 独立，$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)=0$，所以

$$\mathrm{E}(Z^2)=\frac{1}{3}-0+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Z^2 的方差

我们需要 $\mathrm{E}(Z^4)$。根据二项式定理（binomial theorem），

$$Z^4 = (Y-X)^4 = Y^4 - 4Y^3X + 6Y^2X^2 - 4YX^3 + X^4.$$

> **想一想** 我们真的可以把 Y^3X 的期望值写成 $\mathrm{E}(Y^3)\,\mathrm{E}(X)$ 吗?

可以：因为 X 和 Y 独立，所以它们的任何函数（例如 Y^3 和 X）也独立，而独立随机变量（random variable）之积的期望值等于各自期望值之积。中间两个交叉项各含有 X 或 Y 的奇数次幂，所以它们的期望值都是零。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^4) &= \mathrm{E}(Y^4) + 6\,\mathrm{E}(Y^2)\,\mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(X^4)\\ &= \frac{1}{5} + 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{E}(Z^4) - (\mathrm{E}(Z^2))^2 = \frac{16}{15} - \frac{4}{9} = \frac{48-20}{45} = \frac{28}{45}.$$

由于 $\frac{28}{45} = 7\times\frac{4}{45}$，我们得到 $\mathrm{Var}(Z^2) = 7\,\mathrm{Var}(X^2)$，这正是所要证明的。

验算

- Z 在 $[-2,2]$ 上有三角形密度 $f(z) = \frac{1}{4}(2-|z|)$。直接计算，$\mathrm{E}(Z^4) = 2\int_0^2 \frac{1}{4}z^4(2-z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{16}{15}$，与展开所得的结果一致。
- $\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y-X) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$，因为 $\mathrm{E}(Z) = 0$。
- 模拟一百万对 (X,Y)，得出 $\mathrm{Var}(X^2) \approx 0.0889$ 和 $\mathrm{Var}(Z^2) \approx 0.623$，而理论值为 $4/45 \approx 0.0889$ 和 $28/45 \approx 0.622$。

常见错误

- 写成 $\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y^2) + \mathrm{Var}(X^2)$。这样做忽略了 Z^2 内的 $-2XY$ 一项，它的平均值虽然是零，却贡献了 $4\,\mathrm{Var}(XY) = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}$；这个错误会得出 $\frac{8}{45}$，而不是 $\frac{28}{45}$。
- 忘记了 Y^2X^2 一项的二项式系数 6。
- 在 $[-1,1]$ 上把密度当作 1 而不是 $\frac{1}{2}$，结果每个矩都变成两倍。

STEP 之外

$\mathrm{E}(X^k)$ 这些量就是 X 的矩，而处理独立变量之和的简洁方法是矩母函数（moment generating function）$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$，它满足 $M_{Y-X}(t) = M_Y(t)M_X(-t)$。把这个乘积展开成 t 的幂级数（power series），就可以一次过得到 Z 的所有矩。矩母函数和特征函数（characteristic function）是大学第一门概率课程的核心内容：它们是证明中心极限定理（central limit theorem）的主要工具。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）对这些内容有清晰的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。